



Universidad Católica de Santa María

Facultad de Arquitectura e Ingenierías Civil y del Ambiente

Escuela Profesional de Ingeniería Civil

Optimización de vertederos escalonados mediante simulaciones RANS - Caso de estudio de la Represa de Coltani

Tesis presentada por:

Medina Samanez, Cristopher Jesus

ORCID: 0009-0004-2978-6139

para optar el Título Profesional de Ingeniero Civil

Asesor:

Mg. Arroyo Ambia, Arturo Felix

ORCID: 0009-0003-2851-4513

Arequipa - Perú

2026

UCSM-ERP

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SANTA MARÍA
INGENIERIA CIVIL
TITULACIÓN CON TESIS
DICTAMEN APROBACIÓN DE BORRADOR

Arequipa, 02 de Julio del 2026

Dictamen: 015404-C-EPIC-2026

Visto el borrador del expediente 015404, presentado por:

2018130111 - MEDINA SAMANEZ CRISTOPHER JESUS

Titulado:

**OPTIMIZACIÓN DE VERTEDEROS ESCALONADOS MEDIANTE SIMULACIONES RANS - CASO DE
ESTUDIO DE LA REPRESA DE COLTANI**

Nuestro dictamen es:

APROBADO

Titulo Profesional/Titulo de Segunda Especialidad/Grado Académico a optar:

INGENIERO CIVIL

**29688899 - HIDALGO VALDIVIA ALEJANDRO VICTOR
DICTAMINADOR**



**43673910 - NORIEGA AQUISE GUILLERMO YOREL
DICTAMINADOR**



**70600036 - ESPINOZA VIGIL ALAIN JORGE
DICTAMINADOR**



Optimización de los tiempos operativos en el área de control de calidad mediante el análisis XRF en húmedo del concentrado de cobre en una empresa minera del terminal portuario de Matarani, 2025

INFORME DE ORIGINALIDAD

7 %

INDICE DE SIMILITUD

8 %

FUENTES DE INTERNET

0 %

PUBLICACIONES

4 %

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

Submitted to Universidad Católica de Santa
María

Trabajo del estudiante

4 %

2

repositorio.ucsm.edu.pe

Fuente de Internet

2 %

3

bibvirtual.ucb.edu.bo

Fuente de Internet

1 %

4

hdl.handle.net

Fuente de Internet

1 %

Excluir citas

Apagado

Excluir coincidencias < 1 %

Excluir bibliografía

Apagado

DEDICATORIA

A **Juan y Anita**, por sus inmutables valores, que guían cada actuar de mi vida personal y profesional.

A **Yulia**, por su inagotable resiliencia y por mostrarme que en esta vida no queda más que bailar y ser feliz.

A **Julia**, por su sincerísima presencia, esencial para que este camino sea uno lleno de amor y fe.



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios, por procurar un camino de honestidad y ayudarme a perseverar en él.

Agradezco a mis profesores, por la certeza inculcada para defender cada idea de aquellos que se niegan a ver.



RESUMEN

El presente trabajo analiza el efecto hidráulico de la incorporación de un tramo escalonado en el vertedero de la represa Coltani, con el objetivo de optimizar el desempeño hidráulico de la estructura en términos de disipación de energía, explicado a partir del comportamiento del flujo definido según los campos de velocidades resultantes. El vertedero existente fue diseñado para condiciones hidrológicas derivadas de información meteorológica limitada espacial y temporalmente, junto con los efectos acelerados del cambio climático, hacen a los caudales de diseño original susceptibles, lo que justifica la evaluación de alternativas mínimamente intrusivas que mejoren el desempeño hidráulico de la estructura existente.

El estudio se lleva a cabo mediante modelación numérica utilizando herramientas de la dinámica de fluidos computacional (CFD), partiendo de la determinación del modelo de turbulencia RANS que mejor se ajuste al tipo de flujo, y simulando 30 variantes geométricas de vertederos escalonados que son introducidas en el tercer tramo del vertedero manteniendo el resto de la geometría original. Los efectos globales y locales son estudiados para los casos generados a partir de la combinación de las variables independientes, específicamente el número de escalones, el alto del escalón y la forma del escalón.

Los resultados se han evaluado según el desempeño hidráulico en términos de disipación de energía, y han permitido definir que la introducción de un tramo escalonado en el vertedero de la represa Coltani aumenta la disipación de energía para todos los casos, siendo los vertederos con escalones de tipo poza rectangular los que mayor disipación muestran. Sin embargo, se observó que los efectos locales de disipación son reducidos considerablemente al final del vertedero, debido a la ubicación central del tramo escalonado y a la reducción del efecto disipativo global atribuido a la existencia aguas abajo de dos secciones de tipo rápida.

Palabras clave: vertedero escalonado, disipación de energía, CFD.

ABSTRACT

This study analyzes the hydraulic effect of incorporating a stepped section in the existing spillway of the Coltani dam, in order to optimize the hydraulic performance of the structure evaluated in terms of energy dissipation, based on the flow behavior results defined by the velocity field. The current spillway was design for specific hydrologic conditions, built on spatially and temporally limited meteorological data, further compounded by the ramping climate change, making the original design discharge highly sensitive. This context justifies the evaluation of minimally intrusive alternatives that improve the hydraulic performance of the as-built spillway structure.

The research is conducted by numerical modelling based on computational fluid dynamics (CFD) methods, starting with de determination of the RANS turbulence model that is better suited for the flow conditions, and modelling 30 geometric variants of stepped spillways introduced in the third section of the spillway, while the remaining geometry is kept unchanged. Both global and local effects are studied for all cases generated from the combination of the independent variables, namely the number of steps, the height of the step and the shape of the step.

The results are evaluated based on the hydraulic performance in terms of energy dissipation, and have allowed to stablish that introducing a stepped section in the spillway of the Coltani dam increases the energy dissipation for all cases, with rectangular pooled steps showing the best performance. However, the results also show that local effect of dissipation is considerably reduce at the end of the spillway, due to the location of the stepped section in the central section and the resulting reduction of the global dissipative effect attributed to the existent of two channels rapids downstream.

Keywords: stepped spillway, energy dissipation, CFD

ÍNDICE

DEDICATORIA	
AGRADECIMIENTOS	
RESUMEN	
ABSTRACT	
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: GENERALIDADES	2
1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN	2
2. PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN.....	3
2.1. Formulación del Problema.....	3
2.2. Sistematización del Problema	3
3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	3
3.1. Social.....	3
3.2. Ambiental.....	3
3.3. Económica.....	4
3.4. Tecnológica.....	4
3.5. Político/Institucional	4
3.6. Ética	4
4. HIPÓTESIS.....	5
4.1. Hipótesis General.....	5
5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	5
5.1. Objetivo General.....	5
5.2. Objetivo Especifico.....	5
6. ALCANCES	5
7. LIMITACIONES	6
8. VARIABLES	6
CAPÍTULO II: FUNDAMENTO TEÓRICO.....	7
1. ESTADO DEL ARTE.....	7
2. MARCO TEORICO.....	9
2.1. Ecuaciones de Conservación.....	9
2.1.1 Ecuación de Conservación de la Masa	9
2.1.2 Ecuaciones de la Conservación de Momentum.....	10
2.2. Flujos Turbulentos	12
2.2.1 Métodos RANS	13
2.2.1.1. Modelos de Viscosidad de Eddies	14
2.2.1.2. Modelo de Esfuerzos de Reynolds	19
2.2.2 Métodos LES (Large Eddy Simulations)	20
2.3. Métodos de Discretización.....	21
2.3.1 Método de Diferencias Finitas	22
2.3.1.1. Discretización de Derivadas Parciales de Primer Orden	22
2.3.1.2. Discretización de Derivadas Parciales de Segundo Orden	24
2.3.1.3. Discretización Temporal	25
2.3.2 Método de Volúmenes Finitos	26
2.3.2.1. Discretización de los Términos	28

2.3.2.2. Esquemas de Discretización	30
2.3.3 Procedimientos de Solución	37
2.3.3.1. SIMPLE	39
2.3.3.2. PISO	39
2.3.3.3. PIMPLE	40
2.3.4 Condiciones de Frontera	40
2.3.4.1. Funciones de pared	40
2.4. Mallado Computacional	43
2.4.1 No Ortogonalidad	44
2.4.2 Distancia a Muro Adimensional (y+)	48
2.4.3 Capas de refinamiento	50
CAPITULO III: HIDRAULICA DE PRESAS Y VERTEDEROS	57
1. INTRODUCCIÓN	57
2. PRESAS	57
2.1. Clasificación de presas	58
2.1.1 Según sus dimensiones	58
2.1.2 Según el riesgo	58
2.2. Niveles de operación	58
3. VERTEDEROS	60
3.1. Diseño del vertedero	60
3.1.1 Consideraciones iniciales	61
3.2. Tipos de Vertederos	61
3.2.1 Vertedero Cimacio	62
3.2.2 Vertedero lateral	65
3.2.3 Vertedero escalonado	66
3.2.3.1. Regímenes de Flujo	66
3.2.3.2. Factor de fricción	68
3.2.3.3. Muros Laterales	69
3.2.3.4. Disipación de Energía	69
3.2.3.5. Procedimiento de Diseño	71
3.3. Otros tipos	71
CAPITULO IV: CASO DE ESTUDIO – VERTEDERO DE LA REPRESA DE COLTANI 72	
1. INTRODUCCIÓN	72
2. UBICACIÓN	72
2.1. Ubicación política y geográfica	72
2.1.1 Ubicación política	72
2.1.2 Ubicación geográfica	72
2.1.3 Altitud promedio	72
3. HIDROLOGIA	74
3.1. Parámetros geomorfológicos	74
3.2. Registros meteorológicos	76
3.3. Demanda de agua	79
3.3.1 Evapotranspiración Potencial	79
3.3.2 Precipitación efectiva	80
3.3.3 Demanda de agua	81
3.3.4 Generación de descargas	82

3.3.5 Simulación de embalse.....	83
3.3.6 Máximas avenidas.....	85
3.3.6.1. Análisis de frecuencia.....	85
3.3.6.2. Periodo de retorno	86
3.3.7 Numero de curva	86
3.3.8 Máximas avenidas	86
4. HIDRÁULICA.....	88
4.1. Diseño del vertedero	88
4.2. Altura de cresta del vertedero	88
4.3. Avenida de diseño.....	88
4.4. Caudal de salida	89
4.5. Diseño geométrico del vertedero	90
CAPITULO V: METODOLOGÍA	91
1. METODOLOGÍA PROPUESTA	91
1.1. Tipo y Nivel de Investigación.....	91
1.2. Diseño de la Investigación	91
1.3. Métodos de Investigación	92
1.3.1 Escenarios de Investigación	93
1.4. Zona de Estudio	93
2. SISTEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA.....	94
2.1. Criterios de similitud.....	94
2.2. Escenarios Planteados.....	96
3. MODELAMIENTO COMPUTACIONAL	99
3.1. Métodos de Solución.....	99
3.1.1 Recursos Computacionales	99
3.1.2 Paralelización	99
3.1.3 Método de volúmenes finitos	100
3.1.3.1. Modelo de turbulencia	100
3.1.3.2. Esquemas de discretización	101
3.1.3.3. Métodos de solución.....	103
3.2. Construcción de la Geometría.....	104
3.2.1 Mallado Computacional	104
3.2.2 Superficies de frontera	106
3.2.3 Campo interno	106
3.3. Propiedades Hidráulicas.....	108
3.3.1 Velocidad	108
3.3.2 Presión modificada.....	109
3.3.3 Energía cinética turbulenta.....	109
3.3.4 Tasa específica de disipación de turbulencia	110
3.3.5 Viscosidad cinética turbulenta	111
3.3.6 Fracción volumétrica de agua	111
4. VALIDACIÓN Y VERIFICACIÓN DE RESULTADOS	112
4.1. Validación experimental	112
4.1.1 Geometría.....	112
4.1.2 Parámetros hidráulicos	113
4.1.3 Mallado computacional	113

4.1.4 Comparación de los resultados.....	114
4.2. Análisis de sensibilidad de malla.....	115
4.3. Consistencia temporal.....	117
4.4. Verificación del Parámetro y^+	118
CAPÍTULO VI: RESULTADOS Y DISCUSIONES	119
1. RESULTADOS DEL ANÁLISIS HIDRÁULICO DEL FLUJO	119
1.1. Resultados de la velocidad del flujo	119
1.1.1 Velocidad en la sección uno.....	119
1.1.2 Velocidad en la sección dos	122
1.2. Resultados de los tirantes del flujo	124
1.3. Resultados de la energía del flujo	127
1.4. Resultados del comportamiento del flujo	135
2. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS	136
2.1. Influencia del número de escalones	136
2.2. Influencia de la altura de escalón.....	138
2.3. Influencia de la tipología del escalón.....	140
2.4. Influencia de la altura del escalón para las tipologías especiales.	142
2.5. Influencia de las dimensiones de las pozas.....	143
2.6. Evaluación integral del desempeño hidráulico	145
CONCLUSIONES	149
RECOMENDACIONES.....	151
REFERENCIAS.....	152

INDICE DE FIGURAS

Figura 1 Elemento diferencial de volumen.....	9
Figura 2 Esfuerzos actuantes en el eje X	10
Figura 3 Esfuerzo computacional de los métodos de modelación numérica	13
Figura 4 Esfuerzos cortantes en un elemento dentro de un flujo bidireccional	15
Figura 5 Métodos de discretización	21
Figura 6 Aproximación de diferenciales.....	22
Figura 7 Notación para el espacio computacional para el método de diferencias finitas	24
Figura 8 Índices para la discretización temporal	25
Figura 9 Formas de los volúmenes de control	26
Figura 10 Notación para una malla estructurada correspondiente al método de volumen finito	27
Figura 11 Discretización unidimensional	28
Figura 12 Operación entre celdas hexaédricas	31
Figura 13 Operaciones en celdas poliédricas.....	31
Figura 14 Operaciones entre celdas con geometrías diferentes.....	31
Figura 15 Nodos colgantes entre celdas	32
Figura 16 Caras de contorno e internas	32
Figura 17 Determinación del valor de la cantidad ϕ en la cara compartida.....	33
Figura 18 Definición de la dirección del flujo entre dos celdas	33
Figura 19 Esquema de discretización upwind	34
Figura 20 Distancia entre centroides y entre centroide y cara compartida.....	35
Figura 21 Esquema de discretización linear	35
Figura 22 Esquema de discretización linear upwind	36
Figura 23 Limitador de gradiente para el esquema linear upwind	36
Figura 24 Malla con mayor densidad de celdas cerca de las paredes.....	40
Figura 25 Aproximación lineal de la velocidad y a partir de funciones de pared	41
Figura 26 Variación de la velocidad con respecto a la distancia al muro.....	41
Figura 27 Ley de la pared	42
Figura 28 Función continua de la ley de la pared.....	43
Figura 29 Cara compartida entre dos celdas contiguas.....	44
Figura 30 Celdas ortogonales y no ortogonales.....	45
Figura 31 Ángulo de ortogonalidad con respecto a los centroides (izquierda) y con respecto al centro de la cara compartida (derecha)	45
Figura 32 Descomposición en componente ortogonal y no ortogonal	47
Figura 33 Definición de y^+	49
Figura 34 Determinación del tamaño de la malla.	50
Figura 35 Diferencia entre gradientes de velocidad	51
Figura 36 Diferencia entre gradiente longitudinal y perpendicular al flujo	51
Figura 37 Refinamiento en zona de gran gradiente	52
Figura 38 Altura total de refinamiento con respecto al ancho de la capa limite.....	52
Figura 39 Ratio de expansión G en dos celdas	53
Figura 40 Ratio de expansión G en 3 celdas.....	53
Figura 41 Altura de refinamiento con respecto al ancho de la capa limite.....	54
Figura 42 Efecto de la variación de las variables G y N.....	55

Figura 43	Valores determinados de G , N y yH	55
Figura 44	Tipos de transición volumétrica	56
Figura 45	Error de gradiente por transición de volumen abrupta	56
Figura 46	Niveles importantes de una presa	59
Figura 47	Curva capacidad-elevación.....	59
Figura 48	Vertedero cimacio	62
Figura 49	Geometría de la cresta del perfil cimacio.....	63
Figura 50	Coeficiente de descarga.....	63
Figura 51	Corrección de coeficiente de descarga para alturas diferentes a la de diseño	64
Figura 52	Geometría de un vertedero lateral	65
Figura 53	Geometría típica de un vertedero escalonado.....	66
Figura 54	Flujo rasante en vertederos escalonados	67
Figura 55	Regiones del flujo rasante	67
Figura 56	Flujo saltante en un vertedero escalonado.....	68
Figura 57	Variables para el cálculo de disipación de energía.....	70
Figura 58	Mapa de ubicación de la represa Coltani.....	73
Figura 59	Delimitación de subcuentas tributarias de la represa Coltani.....	75
Figura 60	Ubicación de estaciones meteorológicas.....	76
Figura 61	Representación gráfica de las precipitaciones mensuales y anuales promedio del grupo 1	78
Figura 62	Representación gráfica de las precipitaciones mensuales y anuales promedio del grupo 2	78
Figura 63	Hidrograma promedio mensual de cada tributario.....	82
Figura 64	Aportes promedio mensual de las diferentes cuencas	83
Figura 65	Diagrama de flujo metodológico	92
Figura 66	Configuración geométrica de los escenarios simulados.....	98
Figura 67	Comparación de datos experimentales con respecto a simulaciones de distintos modelos de turbulencia	101
Figura 68	Malla inicial sin refinamiento en paredes.....	105
Figura 69	Malla inicial con refinamiento en paredes	105
Figura 70	Modelo experimental de Felder et al. (2012)	112
Figura 71	Dimensiones del modelo computacional y superficies de frontera del modelo de validación.....	113
Figura 72	Mallado computacional del modelo de validación.....	114
Figura 73	Comparación de los resultados experimentales y computacionales.....	115
Figura 74	Variación temporal de la velocidad para diferentes tamaños de malla.	116
Figura 75	Variación del perfil de velocidad para diferentes tipos de malla	116
Figura 76	Consistencia temporal de la velocidad para un punto de control.	117
Figura 77	Variación relativa de la velocidad con respecto al promedio móvil.	118
Figura 78	Histograma de distribución de los valores de y^+	118
Figura 79	Secciones de control transversal para el análisis de velocidades	119
Figura 80	Estabilidad estadística de la velocidad en la sección de control 1.	120
Figura 81	Velocidad promedio en comparación con el vertedero original en la sección de control 2.	123
Figura 82	Secciones de control longitudinales para el análisis de tirantes	124
Figura 83	Tirantes promedio en la sección 3.....	125

Figura 84	Tirantes máximo en la sección 3	126
Figura 85	Secciones de control transversal para el análisis de energía	127
Figura 86	Línea de energía del modelo original y escalones_1, escalones_2, escalones_3	130
Figura 87	Línea de energía del modelo original y escalones_4, escalones_5, escalones_6	130
Figura 88	Línea de energía del modelo original y pooled 2x2_0.01, 2x2_0.02 y 2x2_0.03	131
Figura 89	Línea de energía del modelo original y pooled 2x3_0.01, 2x3_0.02 y 2x3_0.03	131
Figura 90	Línea de energía del modelo original y pooled 3x2_0.01, 3x2_0.02 y 3x2_0.03	132
Figura 91	Línea de energía del modelo original y pooled 3x3_0.01, 3x3_0.02 y 3x3_0.03	132
Figura 92	Línea de energía del modelo original y triangle 2x2_0.01, 2x2_0.02 y 2x2_0.03	133
Figura 93	Línea de energía del modelo original y triangle 2x3_0.01, 2x3_0.02 y 2x3_0.03	133
Figura 94	Línea de energía del modelo original y triangle 3x2_0.01, 3x2_0.02 y 3x2_0.03	134
Figura 95	Línea de energía del modelo original y triangle 3x3_0.01, 3x3_0.03 y 3x3_0.03	134
Figura 96	Comportamiento global del flujo del modelo triangle_2x2_0.03	135
Figura 97	Distribución de vectores de velocidad del modelo triangle_2x2_0.03	135
Figura 98	Régimen de flujo saltante a través del vertedero escalones_6	136
Figura 99	Comparación de la altura de energía total para modelos con diferentes números de escalones	137
Figura 100	Comparación de la altura de energía total para modelos con diferente altura de escalón	138
Figura 101	Comportamiento del flujo en los escalones cuarto, quinto, sexto y séptimo escalón de los modelos escalones_1 (a), escalones_2 (b) y escalones_3 (c) para una fracción de agua mayor a 0.8.	139
Figura 102	Comportamiento del flujo del tercer y cuarto escalón de los modelos escalones_3 (a), pooled_2x2_0.03 (b) y triangle_2x2_0.03 (c) para una fracción de agua mayor a 0.8... ..	140
Figura 103	Comparación de la altura de energía total para modelos con diferentes tipologías	141
Figura 104	Comportamiento del flujo del segundo y tercer escalón de los modelos pooled_2x2_0.01 (a), pooled_2x2_0.02 (b) y pooled_2x2_0.03 (c) para una fracción de agua mayor a 0.8.....	142
Figura 105	Comparación de línea de altura de energía para pozas de diferentes dimensiones.	144

INDICE DE TABLAS

Tabla 1 Matriz de variables.....	6
Tabla 2 Comparación de las propiedades de las estructuras turbulentas gruesas y finas	20
Tabla 3 Parámetros geomorfológicos de las microcuencas de la represa Coltani	75
Tabla 4 Parámetros de las estaciones meteorológicas utilizadas.	77
Tabla 5 Precipitaciones mensuales y anuales promedio del grupo 1	77
Tabla 6 Precipitaciones mensuales y anuales promedio del grupo 2	78
Tabla 7 Cálculo de evapotranspiración potencial	79
Tabla 8 Cálculo de la precipitación efectiva	80
Tabla 9 Celdas de cultivos de las zonas de beneficio	81
Tabla 10 Demanda de agua de las zonas de beneficio	81
Tabla 11 Relación capacidad-volumen de almacenamiento de la represa Coltani	84
Tabla 12 Precipitación máxima en 24 horas para diferentes periodos de retorno.	85
Tabla 13 Caudales máximos instantáneos para diferentes periodos de retorno de la Quebrada Coltani.....	87
Tabla 14 Caudales de salida para diferentes alturas de operación del vertedero.	89
Tabla 15 Detalles geométricos del vertedero de la represa Coltani.	90
Tabla 16 Escenarios de investigación	93
Tabla 17 Factores de escala para diferentes magnitudes.	95
Tabla 18 Escenarios a simular computacionalmente	97
Tabla 19 Parámetros del fichero decomposeParDict	99
Tabla 20 Indicadores estadísticos para cada modelo de turbulencia.	100
Tabla 21 Parámetros para los esquemas de discretización	102
Tabla 22 Parámetros del fichero fvSolution	103
Tabla 23 Parámetros del algoritmo de solución.....	104
Tabla 24 Definición de las superficies de frontera	106
Tabla 25 Parámetros de las mallas generadas para cada caso simulado	107
Tabla 26 Definición de los parámetros del fichero U	108
Tabla 27 Definición de los parámetros del fichero P.....	109
Tabla 28 Definición de los parámetros del fichero k.....	110
Tabla 29 Definición de los parámetros del fichero ω	110
Tabla 30 Definición de los parámetros del fichero νt	111
Tabla 31 Definición de los parámetros del fichero alpha.water	111
Tabla 32 Parámetros geométricos de la malla del modelo de validación	114
Tabla 33 Datos estadísticos del análisis de sensibilidad de malla	116
Tabla 34 Ubicación de las secciones de control en el modelo reducido.....	119
Tabla 35 Valores de velocidad para los últimos diez pasos temporales en la sección de control 1	121
Tabla 36 Valores de velocidad para los últimos diez pasos temporales en la sección de control 2	122
Tabla 37 Ubicación de las secciones de control para el análisis de energía	127
Tabla 38 Resultados de la altura de energía específica en metros	128
Tabla 39 Resultados de la altura de energía total en metros.....	129
Tabla 40 Resultados de la sección 4 agrupados por tipo de poza y alto de escalón.	143
Tabla 41 Comparación de resultados entre la sección inicial y la sección 5	146

Tabla 42	Comparación de resultados entre la sección 3 y la sección 4	147
Tabla 43	Comparación de resultados entre la sección 4 y la sección 5	148



ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo 1 Tirantes promedios.....	159
Anexo 2 Tirantes máximos.....	163
Anexo 3 Resultados del comportamiento del flujo.....	167



INTRODUCCIÓN

En el sistema hidráulico de una presa, las obras destinadas para la evacuación de caudales, como los aliviaderos de demasías, son esenciales para la seguridad y correcta operación de la estructura. Por ello, es común que un vertedero suela representar una gran parte del costo total de este tipo de obras, al ser diseñados no solo como medio de conducción, sino que también como medio de disipación de la energía del flujo ya que controlan las elevadas velocidades que podrían generar daños tanto en la propia estructura como aguas debajo de ella.

Existen diversas estructuras hidráulicas que permiten disipar la energía, siendo los vertederos escalonados una alternativa muy eficiente gracias a su capacidad de reducir la energía del flujo, mediante pérdidas hidráulicas progresivas debido a recirculación o aireación del flujo. Así, para los vertederos escalonados el desempeño hidráulico de la estructura dependerá directamente de factores geométricos como el número de escalones, la altura del escalón o la forma del escalón, lo cuales junto al caudal definirían el tipo de flujo y, en consecuencia, el mecanismo de disipación.

Por lo tanto, el presente estudio se centra en la incorporación de distintos tipos de escalones en el tramo central del vertedero existente de la represa Coltani con el fin de mejorar su desempeño hidráulico sin alterar de sobremanera la estructura, ya que al ser una estructura ya existente su concepción se dio a partir de condiciones hidrológicas específicas, las mismas que fueron determinadas con información meteorológica e hidrológica con una cobertura temporal y espacial reducida, y además, sin tomar en cuenta la tasa acelerada de cambio climático y su efecto en la precipitaciones máximas proyectadas.

De esta forma, el análisis del flujo a través de los escenarios planteados se ejecutará mediante la dinámica de fluidos computacional. Específicamente, se utilizarán modelos de turbulencia RANS que permitirán obtener información acerca del campo de velocidad y la energía disipada, la misma que será sometida a diferentes métodos de validación que aseguren resultados precisos y exactos.

Finalmente, la presente investigación tiene como objetivo optimizar el vertedero existente de la represa Coltani, mediante la incorporación de distintos tipos de tramos escalonados. Los resultados permitirán definir la influencia de las características geométricas de los escalones sobre la disipación de energía y los campos de velocidades generados.

CAPÍTULO I: GENERALIDADES

1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Una de las partes más importantes para garantizar la seguridad de una presa, son los aliviaderos de demasías. El diseño de estos aliviaderos depende de las condiciones específicas de cada proyecto, y se suele realizar utilizando los criterios establecidos en manuales técnicos para llegar a un diseño final (Bureau of Reclamation, 1987; Magel Pereira, 2020; Ruff & Ward, 2002; U.S. Army Corps of Engineers, 1990), estas pautas de diseño son derivadas de los resultados obtenidos a partir de pruebas en modelos físicos, los cuales buscan determinar las propiedades hidráulicas de la estructura como la capacidad de descarga, comportamiento del flujo, y el campo de velocidades y la distribución de presiones a lo largo de la estructura.

Las diferentes componentes de estas estructuras hidráulicas como la cresta, los muros guía, el canal de aproximación, el canal de caída y diferentes tipos de disipadores de energía; han sido tradicionalmente investigados utilizando modelos físicos (Almeland et al., 2021; Chanson, 2022; Salmasi & Abraham, 2022). A partir de estos modelos se ha podido determinar que los vertederos de caída “Escalonada” son superiores a su contraparte “No escalonada” (lisa) en cuanto a disipación de energía y por lo tanto a la relación costo-beneficio (Aras & Berkun, 2010; Simões et al., 2010),

Por otro lado, el constante desarrollo de la dinámica de fluidos computacional en conjunto con la evolución del poder computacional, permiten simular modelos numéricos, cada vez en menos tiempo y con un menor costo, que representan con un buen grado de precisión el comportamiento de los fluidos a través de geometrías complejas (Bennett et al., 2018; Darnegara et al., 2020). La última década ha visto el surgimiento de diferentes métodos, siendo los basados en modelos de turbulencia RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations) los más utilizados en el ámbito académico y comercial.

El presente trabajo de investigación toma como caso de estudio el vertedero de la represa de Coltani, diseñado actualmente con una configuración lisa. No obstante, diversos estudios han demostrado que los vertederos de tipo escalonado disipan la energía de manera más eficiente. Por ello, esta investigación emplea simulaciones computacionales basadas en modelos de turbulencia RANS y, a diferencia de estudios previos, explora geometrías poco convencionales, pero constructivamente viables, enmarcadas en el contexto topográfico y operativo de la represa de Coltani. Los resultados obtenidos permitirán, a partir de un análisis estadístico riguroso, establecer conclusiones específicas para este caso de estudio, las cuales podrán ser extrapoladas a otros proyectos hidráulicos similares.

2. PROBLEMÁTICA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. Formulación del Problema

¿Qué configuración geométrica del tramo escalonado maximiza la eficiencia hidráulica del vertedero de la represa de Coltani en términos de disipación de energía, evaluada mediante simulación CFD con modelos de turbulencia RANS?

2.2. Sistematización del Problema

¿Cuáles son los escenarios geométricos y las condiciones de flujo que deben modelarse para un vertedero escalonado de la represa Coltani?

¿Cuál es el comportamiento del flujo a través de los escenarios geométricos propuestos, según los modelos de turbulencia RANS?

¿Qué parámetros geométricos (número, altura, y forma del escalón) influyen de forma significativa en la eficiencia hidráulica de un vertedero escalonado en términos de disipación de energía

3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación se justifica en los aspectos sociales, ambientales, económicos, tecnológicos, políticos y éticos como se describe a continuación:

3.1. Social

Ya que una sociedad asegura su disponibilidad permanente de recursos hídricos mediante la construcción de presas, las mismas que se valen de vertederos para garantizar su correcto funcionamiento ante eventos hidrológicos extremos, es que la presente investigación busca mejorar el entendimiento del flujo hidráulico a través de vertederos de tipo “Escalonado”, empleando modelos de turbulencia RANS.

3.2. Ambiental

Dado que el cambio climático y su influencia en el aumento de las precipitaciones máximas alrededor del mundo (Tabari, 2020) hace necesario la reevaluación de estructuras hidráulicas ya construidas, es que la presente investigación explora diferentes métodos de la dinámica de fluidos computacional como alternativas para simular caudales máximos a través de vertederos de tipo “Escalonado”, ya que un diseño incorrecto de este tipo de vertederos podría llevar a una falla catastrófica de la presa (Ghimire & Schulenberg, 2022).

3.3. Económica

Considerando que la construcción de una presa implica una inversión grande la cual dependerá del volumen y el alto del cuerpo de la presa (Petheram & McMahon, 2019). Además, un gran porcentaje del costo directo de un proyecto como este corresponde a la construcción de los vertederos de demasías, por lo cual el presente trabajo de investigación mediante la utilización de diferentes métodos de la dinámica de fluido computacional busca entender mejor el comportamiento hidráulico de vertederos de tipo “Escalonado” para poder elaborar un diseño costo-eficiente.

3.4. Tecnológica

Dado que la integración de modelos físicos con modelos numéricos para el estudio de fluidos a través de estructuras hidráulicas representa el estándar de las investigaciones actuales, es que el presente trabajo de investigación utiliza herramientas de simulación numérica como soporte para evaluar el comportamiento del flujo en vertederos escalonados y así contribuir al diseño geométrico óptimo de estas estructuras.

3.5. Político/Institucional

En concordancia con las políticas públicas nacionales establecidas en la Política y Estrategia Nacional de Recursos Hídricos por la Autoridad Nacional del Agua (2015), las cuales apuntan al aseguramiento de la disponibilidad y manejo sostenible del agua, es que el presente trabajo de investigación tiene como fin utilizar distintos métodos de la dinámica de fluidos computacional para poder comprender mejor el comportamiento de un flujo hidráulico a través de un vertedero de tipo “Escalonado”, corroborando las consideraciones de diseño actuales, así como establecer nuevos criterios que ayuden a la optimización de los diseños.

3.6. Ética

La presente investigación se rige por el Código de Ética de para la Investigación y la Integridad Científica de la Universidad Católica de Santa María (2024). Además, toma en cuenta las consideraciones establecidas en Roache (1998) en cuanto a la verificación y validación de los resultados de simulaciones de la dinámica de fluidos computacional para poder describir flujos hidráulicos a través de vertederos de tipo “Escalonado”, obteniendo resultados reales y confiables.

4. HIPÓTESIS

4.1. Hipótesis General

La variación de parámetros geométricos como el número, la altura, o forma de los escalones de la sección escalonada introducida en el tramo central de la represa Coltani influye significativamente en la eficiencia hidráulica, logrando, mediante simulaciones computacionales con modelos de turbulencia RANS, definir la configuración más eficiente en términos de disipación de energía.

5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

5.1. Objetivo General

Optimizar la eficiencia hidráulica del vertedero de la represa Coltani en términos de disipación de energía mediante la introducción de un tramo escalonado utilizando simulaciones computacionales basadas en modelos de turbulencia RANS.

5.2. Objetivo Especifico

Definir los escenarios geométricos y las condiciones de flujo a modelar para el vertedero de la represa Coltani.

Ejecutar el modelamiento hidráulico de los diferentes escenarios geométricos propuestos, utilizando modelos de turbulencia RANS, con el fin de analizar el flujo.

Evaluar la influencia de los parámetros geométricos de los tramos escalonados introducidos al vertedero original sobre eficiencia hidráulica, mediante un riguroso análisis estadístico de la disipación de energía, a partir del procesamiento y análisis de la información generada mediante las simulaciones numéricas.

6. ALCANCES

El alcance de la presente investigación es de tipo correlacional, ya que busca establecer la relación entre la configuración geométrica de vertederos escalonados y su desempeño hidráulico, en términos de disipación de energía. Se toma como caso aplicativo el vertedero de la represa de Coltani, diseñada con una configuración lisa. A partir de estas condiciones topográficas y operativas, se analizarán configuraciones alternativas, incluyendo perfiles poco convencionales, pero constructivamente viables. La evaluación se realiza sobre los resultados de simulaciones computacionales basadas en modelos de turbulencia RANS, utilizando el software OpenFOAM. El estudio no contempla validación experimental del mismo modelo, pero se valida a partir de otros antecedentes bibliográficos relevantes.

7. LIMITACIONES

La presente investigación se limita:

- Por el poder computacional disponible y el tiempo de ejecución necesario para resolver las Ecuaciones de Navier-Stokes.
- Por la simplificación de las Ecuaciones de Navier-Stokes mediante la aplicación de los esfuerzos de Reynolds.
- Por la resolución de la grilla utilizada para la discretización del problema.
- Por el uso de un solo caudal para los escenarios propuestos.

8. VARIABLES

Con el fin de responder las preguntas de investigación y cumplir los objetivos trazados, es que se definen las variables independientes, las cuales serán manipuladas para obtener diferentes respuestas de las variables dependientes, las mismas que se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1
Matriz de variables

Tipo de Variable	Variable	Dimensión	Indicador	Unidad
Independientes	Número de escalones	Configuración geométrica	Cantidad de escalones	adimensional
	Altura de escalón	Geometría del escalón	Altura vertical del escalón	metros
	Ancho de escalón	Geometría del escalón	Ancho horizontal del escalón	metros
	Forma de Escalón	Tipo de escalón	Regular, poza rectangular y poza triangular	cualitativa
Dependientes	Energía disipada	Energía del flujo	Diferencia entre secciones	m
	Campo de velocidades	Distribución del flujo	Vectores de velocidad	m/s

CAPÍTULO II: FUNDAMENTO TEÓRICO

1. ESTADO DEL ARTE

En esta sección se detallan los avances tecnológicos y metodológicos que se vienen utilizando para el modelamiento de flujos hidráulicos de superficie libre a través de vertederos. A pesar de que mucha de la literatura estudiada presenta similares objetivos, se busca: hacer un recuento histórico de los mismos, una generalización de las etapas que se suelen realizar en cada uno de ellos y las diferentes perspectivas en que se orientan, así como los diferentes métodos que se prefieren utilizar para cada caso particular.

Las existencias más antiguas de vertederos de tipo Escalonado se remontan al año 694 AC en la presa del Rio Khosr en Iraq (Chanson, 2011). Desde entonces el entendimiento del comportamiento hidráulico de estas estructuras ha ido en aumento, habiéndose realizado numerosos experimentos a escala real como a escala reducida, lo que ha permitido establecer criterios de diseño que garanticen la descarga de caudales máximos extraordinarios en una presa, procurando la operación segura de tan importante estructura.

Los criterios de diseño vigentes han sido en su mayoría derivados de modelos experimentales. Para vertederos de tipo “Escalonado” se puede remarcar los trabajos de investigación elaborados por Boes & Hager (2003) que determino el inicio del flujo rasante en función del tirante crítico, la pendiente del aliviadero y la altura de los escalones. Por otro lado, Rajaratnam (1990) definido para el flujo rasante una formulación para el esfuerzo cortante que se produce entre la capa superior y los flujos recirculantes en los escalones. Otras consideraciones para el modelado físico de estos vertederos son definidas por Boes & Hager, (2003b), quienes determinaron que la concentración de aire en el flujo depende solo de la distancia vertical hasta la cresta del aliviadero y su pendiente.

Por otro lado, en la última década el uso de la dinámica de fluidos computacional para la modelación hidráulica de flujos turbulentos, incluyendo a los flujos a través vertederos de tipo “Escalonado”, ha aumentado exponencialmente. Por lo tanto, para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes sobre flujos turbulentos se suele adoptar modelos simplificados de las misma especialmente en las zonas de turbulencia para reducir los tiempos de procesamiento, entre ellos los modelos RANS (Reynold’s Averaged Navier-Stokes Equations) o los modelos LES (Large Eddy Simulations) (Hekmatzadeh et al., 2017; Tongkratoke et al., 2009), siendo el primero el más utilizado al presentar una buena relación entre precisión y costo computacional.

Los modelos RANS requieren adicionalmente la aplicación de modelos de turbulencia para poder determinar el valor del “esfuerzo de Reynolds” y con este poder resolver las Ecuaciones de Navier-Stokes. Así, existen diferentes familias de estos modelos de turbulencia (e.g. k-epsilon, k-omega, SST k-omega), las cuales presentan ventajas y desventajas según el tipo de flujo que se quiera simular. En consecuencia, se han utilizado estos modelos para el análisis del comportamiento de flujos hidráulicos a través de vertederos escalonados, analizando factores como; el efecto de la convergencia de los muros laterales en el flujo (Chen et al., 2022), el efecto de las propiedades geométricas de los escalones (Saleh et al., 2022), las fluctuaciones de los campos de velocidad y las presiones (Jahad et al., 2022), así como el tipo de flujo y sus respectivas capacidades para la disipación de la energía (Kaouachi et al., 2021).

En el ámbito nacional, existen muchos trabajos de investigación que evalúan modelos físicos de vertederos de diferentes tipos como “Laberinto”, “Tecla de Piano”, “Creager”, (Cáceres Rodríguez, 2021; Flores Arana, 2019; Quispe Riveros & Villagra Ambrancio, 2020). Otros planteamientos de la investigación se enfocan en el análisis del campo de presiones o del coeficiente de descarga (Bedregal Guevara & Yana De La Riva, 2019; Ccancapa Surco & Phoco Taco, 2021; Salcedo Mendoza Ferdinand, 2017). Sin embargo, si bien existen investigaciones que evalúan el funcionamiento hidráulico de los vertederos utilizando técnicas de la dinámica de fluidos computacional (Díaz Vilca & Morales Pino, 2021; Jimenez Motta, 2019; Stretz Ramos, 2021), estos trabajos fueron realizadas sobre vertederos de tipo liso (no escalonado).

Es así que se ha detallado en esta sección el avance de este tipo de investigaciones en los últimos años. De la misma manera, se ha delineado las diferentes técnicas que estas investigaciones suelen aplicar, abordando cada una de ellas y examinando las conclusiones propuestas. Por último, se ha identificado que, si bien existe abundante literatura sobre el comportamiento hidráulico de vertederos escalonados, la mayoría de los estudios se enfocan en configuraciones geométricas estándar sin explorar sistemáticamente su optimización. En consecuencia, se evidencia la necesidad de investigar cómo las variaciones geométricas influyen en la eficiencia hidráulica de estas estructuras.

2. MARCO TEORICO

Esta sección detalla los fundamentos teóricos necesarios para la conducción de la investigación. Partiendo de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos, y las técnicas disponibles para la solución de las mismas. Seguidamente, se delinean los métodos de la dinámica de fluidos computacional que se aplicaran en el presente estudios para el modelamiento de flujos hidráulicos de superficie libre. Además, se definen las consideraciones de la hidráulica que gobiernan el diseño y funcionamiento de vertederos de tipo “Escalonado”.

2.1. Ecuaciones de Conservación

Un flujo puede ser descrito mediante las ecuaciones de conservación de la masa, momentum y energía, aplicadas a un volumen de control infinitesimal dentro del campo de flujo, resultando en las **Ecuaciones Diferenciales Generales del Movimiento de Fluidos** (Singh & Vimal, 2022). Para un fluido newtoniano como el agua, se asume una variación lineal de la fricción, obteniendo así las **Ecuaciones de Navier-Stokes**, las cuales son descritas a continuación.

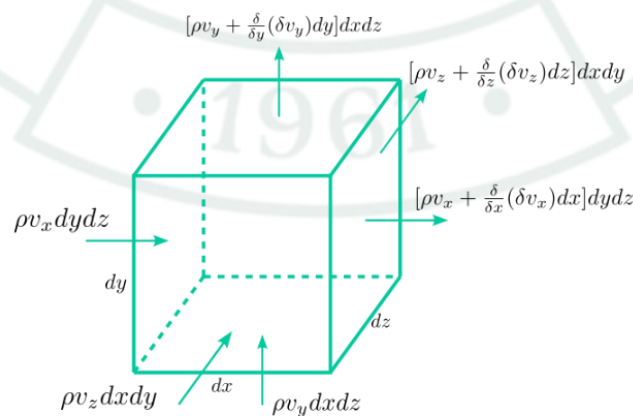
2.1.1 Ecuación de Conservación de la Masa

Partiendo de un elemento de volumen $dx dy dz$ con flujos de masa entrantes y salientes como se muestra en la Figura 1. Se puede obtener la ecuación de la conservación de la masa, considerando que la suma de cambios de masa por unidad de tiempo debido a cambios en la densidad y la diferencia del flujo de masa entrante y saliente es igual a cero.

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} dx dy dz + \left[\rho v_x + \frac{\delta(\rho v_x)}{\delta x} dx \right] dy dz - \rho v_x dy dz + \left[\rho v_y + \frac{\delta(\rho v_y)}{\delta y} dy \right] dx dz - \rho v_y dx dz + \left[\rho v_z + \frac{\delta(\rho v_z)}{\delta z} dz \right] dx dy - \rho v_z dx dy = 0$$

Figura 1

Elemento diferencial de volumen



Nota: Elaboración propia.

Arreglando los términos y dividiendo entre $dx dy dz$, se obtiene:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta(\rho v_x)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v_y)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho v_z)}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Esta ecuación implica que la masa no puede desaparecer. Finalmente, para flujos incompresibles, se puede reducir a la Ec. 1:

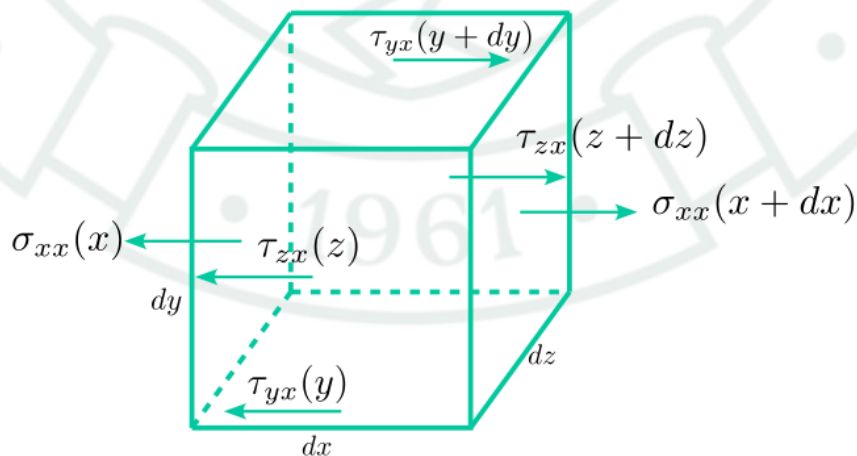
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) = 0 \quad \text{Ec. 1}$$

2.1.2 Ecuaciones de la Conservación de Momentum

La ecuación de conservación del momento se basa en la Segunda Ley de Newton, la cual indica que la tasa de cambio del momentum de una partícula del fluido es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre ella. Para un fluido newtoniano como el agua, los esfuerzos por viscosidad, quienes mantienen una proporción lineal con las tasas de deformación (White & Xue, 2016), pueden ser escritos en términos de deformación lineal y deformación volumétrica. Siendo sus componentes para las direcciones x, y, z :

Esta ecuación establece que el cambio de momentum de un sistema de partículas por unidad de tiempo es igual a la sumatoria de fuerzas actuando sobre el volumen $dx dy dz$. Esto es la Segunda Ley de Newton, la suma de fuerzas que actúan sobre un volumen de control es igual a la masa por la aceleración.

Figura 2
Esfuerzos actuantes en el eje X



Nota: Elaboración propia

En el eje x, considerando los esfuerzos que actúan sobre las diversas caras del volumen de control como se muestra en la Figura 2. Se tiene que en el volumen $dx dy dz$ pueden actuar fuerzas internas (gravedad, eléctrica, centrífuga, electromagnética) y fuerzas en la superficie (fuerzas friccionales normales y cortantes, fuerzas de presión). A partir de:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$mg_x + \sigma_{xx}(x + dx)(dydz) - \sigma_{xx}(x)(dydz) + \tau_{yx}(y + dy)(dxdz) - \tau_{yx}(y)(dxdz) + \tau_{zx}(z + dz)(dxdy) - \tau_{zx}(z)(dxdy) = ma_x$$

El termino de aceleración puede ser representado como:

$$a_x = \frac{\delta u}{\delta t}$$

Derivando y aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta z} \frac{\delta z}{\delta t} = \left(\underbrace{\frac{\delta u}{\delta t}}_{Acel.Local} + \underbrace{u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} + w \frac{\delta u}{\delta z}}_{Acel.Convectiva} \right)$$

Dividendo por el volumen $dx dy dz$ y remplazado la aceleración

$$\frac{mg_x + \sigma_{xx}(x + dx)(dydz) - \sigma_{xx}(x)(dydz) + \tau_{yx}(y + dy)(dxdz) - \tau_{yx}(y)(dxdz) + \tau_{zx}(z + dz)(dxdy) - \tau_{zx}(z)(dxdy)}{dx dy dz} = \frac{m}{dx dy dz} \frac{\delta u}{\delta t}$$

Ordenando los términos

$$\rho g_x + \frac{\sigma_{xx}(x + dx) - \sigma_{xx}(x)}{dx} + \frac{\tau_{yx}(y + dy) - \tau_{yx}(y)}{dy} + \frac{\tau_{zx}(z + dz) - \tau_{zx}(z)}{dz} = \rho \left(\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right)$$

Aplicando el límite cuando $dx dy dz$ se aproxima a cero, se obtienen las ecuaciones de movimiento para un fluido, para cada eje cartesiano según las Ecuaciones 2, 3 y 4.

$$\rho g_x + \frac{d\sigma_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} = \rho \left(\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right) \quad \text{Ec. 2}$$

$$\rho g_y + \frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_{yy}}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} = \rho \left(\frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} \right) \quad \text{Ec. 3}$$

$$\rho g_z + \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_{zz}}{dz} = \rho \left(\frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \right) \quad \text{Ec. 4}$$

Los esfuerzos axiales y transversales pueden ser remplazados por las Relaciones Constitutivas para un fluido newtoniano.

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{du}{dx}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{dv}{dy}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{dw}{dz}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right)$$

Sustituyendo y reordenando en las ecuaciones de movimiento se obtiene las Ecuaciones de Navier-Stokes definidas para por las Ecuaciones 5, 6 y 7.

$$\rho \left(\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right) = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) \quad \text{Ec. 5}$$

$$\rho \left(\frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} \right) = \rho g_y - \frac{dp}{dy} + \mu \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} \right) \quad \text{Ec. 6}$$

$$\rho \left(\frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \right) = \rho g_z - \frac{dp}{dz} + \mu \left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) \quad \text{Ec. 7}$$

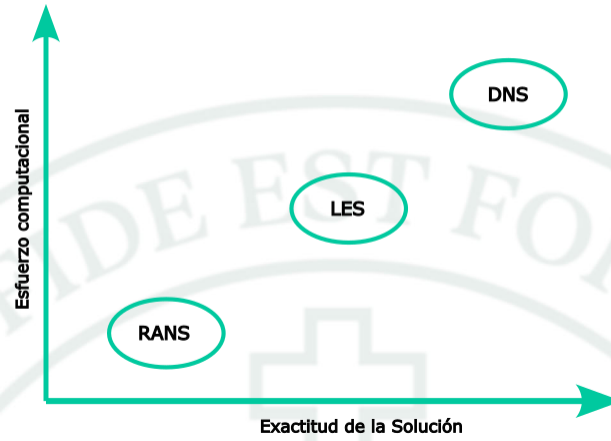
2.2. Flujos Turbulentos

En general un flujo puede presentar un régimen laminar, turbulento, o una región de transición entre ambos regímenes. Las ecuaciones derivadas en el acápite anterior pueden ser resueltas directamente de forma numérica (DNS, simulación numérica directa). Sin embargo, para flujos turbulentos, se requiere una resolución alta para poder reproducir los remolinos de las escalas más pequeñas. Esto implica una malla computacional muy fina, lo que a su vez requiere un gran poder computacional. Así, si no se usa una resolución adecuada la solución no convergerá o los resultados serán incoherentes. Lo que se busca es “un modelo ideal que introduzca la menor cantidad de complejidad, mientras que capture toda la esencia física relevante” (Wilcox, 2006).

Entonces, para poder simular flujos turbulentos con menos poder computacional se puede simplificar los modelos a partir de ciertas asunciones. Los métodos más utilizados son los métodos RANS (Promedio de Reynolds de las Ecuaciones de Navier-Stokes) y LES (Simulaciones Large-Eddy). La Figura 3 muestra gráficamente la comparación entre la precisión y el esfuerzo computacional necesario para una simulación computacional con cada método mencionado.

Figura 3

Esfuerzo computacional de los métodos de modelación numérica



Nota: Elaboración propia

2.2.1 Métodos RANS

A pesar de ser el método que menor precisión obtiene, es el más utilizado debido a su rapidez computacional. En este método una variable de flujo ϕ se descompone en un término promediado en el tiempo $\bar{\phi}$ y otro que captura sus fluctuaciones ϕ' , esta descomposición es conocida como Promedio de Reynolds.

$$\phi(x, t) = (\bar{\phi} + \phi')$$

Entonces, las ecuaciones de Navier-Stokes al ser promediadas en el tiempo, para el eje X:

$$\rho \left(\frac{d(\bar{u} + u')}{dt} + \frac{d(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')}{dx} + \frac{d(\bar{v} + v')(\bar{u} + u')}{dy} + \frac{d(\bar{w} + w')(\bar{u} + u')}{dz} \right) = \rho g_x - \frac{d(\bar{p} + p')}{dx} + \mu \left(\frac{d^2(\bar{u} + u')}{dx^2} + \frac{d^2(\bar{u} + u')}{dy^2} + \frac{d^2(\bar{u} + u')}{dz^2} \right)$$

Considerando las reglas de los promedios

$$\overline{uv} = \overline{(u + u')(v + v')} = \overline{u v} + \overline{u v'} + \overline{u' v} + \overline{u' v'}$$

$$\overline{u v} = \bar{u} \bar{v}$$

$$\overline{u v'} = \bar{u} \bar{v'} = \bar{u} * 0 = 0$$

$$\overline{u' v} = \bar{u'} \bar{v} = 0 * \bar{v} = 0$$

$$\overline{uv} = \bar{u} \bar{v} + \overline{u' v'}$$

Se puede simplificar la ecuación anterior a:

$$\rho \left(\frac{d(\bar{u} + u')}{dt} + \frac{d(\bar{u}\bar{u} + \bar{u}u' + u'\bar{u} + u'u')}{dx} + \frac{d(\bar{v}\bar{u} + \bar{v}u' + v'\bar{u} + v'u')}{dy} + \frac{d(\bar{w}\bar{u} + \bar{w}u' + w'\bar{u} + w'u')}{dz} \right) \\ = \rho g_x - \frac{d(\bar{p})}{dx} - \frac{d(p')}{dx} + \mu \left(\frac{d^2(\bar{u})}{dx^2} + \frac{d^2(u')}{dx^2} + \frac{d^2(\bar{u})}{dy^2} + \frac{d^2(u')}{dy^2} + \frac{d^2(\bar{u})}{dz^2} + \frac{d^2(u')}{dz^2} \right)$$

Promediando en el tiempo y reordenando

$$\rho \left(\frac{d\bar{u}}{dt} + \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} + \bar{v} \frac{d\bar{u}}{dy} + \bar{w} \frac{d\bar{u}}{dz} \right) = \rho g_x - \frac{d\bar{p}}{dx} + \mu \left(\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} + \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \right) - \rho \left(\frac{d(\overline{u'u'})}{dx} + \frac{d(\overline{u'v'})}{dy} + \frac{d(\overline{u'w'})}{dz} \right)$$

Generalizando en notación de índices se tiene:

$$\rho \frac{d}{dt}(\bar{u}_i) + \rho u_j \frac{d}{dx_j}(\bar{u}_i) = \rho g_i - \frac{d\bar{p}}{dx_i} + \mu \frac{d^2}{dx_j dx_j}(\bar{u}_i) - \rho \frac{d}{dx_j}(\overline{u'_i u'_j})$$

El termino en negrilla es conocido como los “Esfuerzos de Reynolds” el cual debe ser expresado en términos de las cantidades del flujo promedio para resolver las Ecuaciones de Navier-Stokes.

$$-\rho \overline{u'_i u'_j}$$

Esto se conoce como el “Problema de Solución de la Turbulencia” (Taylor, 1935), el cual puede ser resuelto mediante el uso de modelos de turbulencia como los “Modelos de Viscosidad de Eddy” o “Modelos de Esfuerzos de Reynolds” los cuales son descritos en las siguientes secciones.

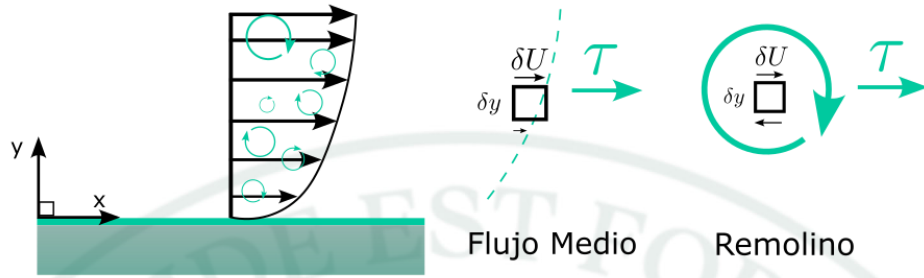
2.2.1.1. Modelos de Viscosidad de Eddies

Considerando un flujo bidimensional, un elemento de este flujo es afectados por los esfuerzos cortantes del flujo promedio y por la turbulencia como se aprecia en la Figura 4 y como se definen en las ecuaciones siguientes:

$$\tau_{flujo\ promedio} = \mu * \frac{\delta \bar{u}}{\delta y} \\ \tau_{turbulencia} = -\rho \overline{u'_i u'_j'}$$

Figura 4

Esfuerzos cortantes en un elemento dentro de un flujo bidireccional



Nota: Elaboración propia

En los métodos RANS, no se calcula directamente las componentes fluctuantes de la velocidad u_i' . Si no que, son modeladas a partir de las componentes promedio de la velocidad $\bar{u}_i$. Boussinesq (1897) propone una hipótesis similar a la de Stokes, donde se asume que los esfuerzos de Reynolds son proporcionales al gradiente de la velocidad.

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \frac{\delta \bar{u}}{\delta x}$$

Esta constante de proporcionalidad μ_t se denomina viscosidad turbulenta, es de naturaleza artificial y controla la intensidad de la difusión. Por lo tanto, extendiendo este modelo en tres dimensiones, para los esfuerzos cortantes de Reynolds

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\delta \bar{u}_i}{\delta x_j} + \frac{\delta \bar{u}_j}{\delta x_i} \right)$$

Mientras que para los esfuerzos normales de Reynolds

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\delta \bar{u}_i}{\delta x_j} + \frac{\delta \bar{u}_j}{\delta x_i} - \frac{2}{3} \frac{\delta \bar{u}_k}{\delta x_k} \right) - \frac{2}{3} \rho k$$

Ambas ecuaciones pueden ser incorporadas en la ecuación:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = 2\mu_t \left(S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\delta \bar{u}_k}{\delta x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad \text{Ec. 8}$$

Siendo $i = x, y, z$ y $j = x, y, z$ para un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) y:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \bar{u}_i}{\delta x_j} + \frac{\delta \bar{u}_j}{\delta x_i} \right)$$

δ_{ij} (Delta de Kronecker) toma el valor de 1 cuando $i = j$, y de 0 para los demás escenarios. k representa la energía cinética turbulenta.

La viscosidad de Eddy μ_t , también conocido como viscosidad turbulenta, es una propiedad de la turbulencia del flujo en cuestión. Comúnmente $\mu_t \gg \mu$ (μ_t suele tomar valores entre 100 a 1000 veces el valor de η), ya que la resistencia debido a la turbulencia es mucho mayor a la resistencia debida a la fricción.

El lado derecho de la Ecuación 8 es estructuralmente parecida al lado derecho de las Ecuaciones del Hipótesis de Stokes, excepto por el uso de la viscosidad turbulenta en ves de la viscosidad molecular y el termino $2/3\bar{\rho}k\delta_{ij}$, el cual represente la presión turbulenta.

Debido a la simplificación realizada, las incógnitas se reducen de los 6 esfuerzos por turbulencia, a solo dos, denominados k y μ_t . Su calcula dependerá del “Modelo de Viscosidad de Eddy” utilizado. Estos varían según la cantidad de Ecuaciones de Transporte necesarias para resolver las ecuaciones. Siendo los modelos de “cero ecuaciones”, los que usan una ecuación simple algébrica para resolver η_t ignorando k . Además, los modelos de una ecuación, usan una ecuación diferencial para calcular η_t , ignorando también a k . Finalmente, los modelos de dos ecuaciones determinan η_t y k con dos ecuaciones diferenciales.

La notación presentada a continuación por simplicidad ignora la representación de la velocidad y densidad como cantidades promediadas.

a. Modelos de cero ecuaciones, son los modelos más simples de turbulencia, donde la viscosidad turbulenta es representada por una ecuación algebraica simple. Siendo el más antiguo el modelo de Longitud de Mezcla de Prandtl (1925), el que supone para flujos próximos a una pared la viscosidad turbulenta puede ser representada en función de la distancia al muro d , según la ecuación:

$$\eta_t = \rho l^2 \left| \frac{\delta v_m}{\delta d} \right|$$

l es la longitud de mezcla, y se define como la distancia que viajaría una instancia de turbulencia hasta mezclarse totalmente con sus alrededores. Se asume como

$$l = 0.4187d$$

Siendo la constante de Kármán el valor de 0.4187. v_m es el componente paralelo al muro de la velocidad promediada. El valor absoluto garantiza que el gradiente de la velocidad sea positivo.

b. Modelos de una ecuación, el modelo de Spalart & Allmaras (1994), el más representativo de este grupo. Al ser un modelo de una ecuación resuelve una sola ecuación de transporte para calcular la viscosidad turbulenta ν_t . Fue diseñado para fines aeroespaciales que incorporan flujos sobre superficies dando buenos resultados para flujos con gradiente de presión adversa. Su robustez lo ha hecho popular en aplicaciones de turbo maquinaria, mientras que es mucho menos precisos para flujos de superficie libre. Este modelo fue diseñado para flujos en la capa limite cerca al muro, así como para flujos de esfuerzos libres y flujos de estela. Por otro lado, no es adecuado para configuraciones complejas (Schwarze, 2013).

c. Modelos de dos ecuaciones, estos modelos resuelven dos ecuaciones de transporte, una para la energía cinética turbulenta y otra para una escalada de disipación, permitiendo calcular la viscosidad en todo el dominio.

Modelo $k - \epsilon$, Es uno de los modelos más utilizados y es definido como:

$$\eta_t = C_\eta \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

k es la energia cinética turbulenta, ϵ es la tasa de disipación de la turbulencia, C_η es una constante empírica.

Las ecuaciones de transporte utilizadas para calcular k y ϵ

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\rho k)}{\delta t} + \frac{\delta(\rho k v_i)}{\delta i} &= \frac{\delta}{\delta j} \left[\left(\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_k} \right) \frac{\delta k}{\delta j} \right] + \frac{\delta v_j}{\delta i} \left(2\eta_t S_{ij} - \frac{2\eta_t}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) - \rho \epsilon \\ \frac{\delta(\rho \epsilon)}{\delta t} + \frac{\delta(\rho \epsilon v_i)}{\delta i} &= \frac{\delta}{\delta j} \left[\left(\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\delta \epsilon}{\delta j} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \frac{\delta v_j}{\delta i} \left(2\eta_t S_{ij} - \frac{2\eta_t}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \end{aligned}$$

Donde σ_k , σ_ϵ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ y C_η son constantes empíricas que toman los valores 1.0, 1.3, 1.44, 1.92 y 0.09 respectivamente (Launder & Spalding, 1974). Este modelo es adecuado para el cálculo de flujos simples a través de estructuras donde los valores locales no están definidos. Por otro lado, no son adecuados para el cálculo de flujos que se separan debido a gradientes adversos de presión. Ya que el inicio de la separación se estima muy tarde, y el área de separación es infravalorada. Además, no muestra buen desempeño para flujos con Numero de Reynolds bajo, para lo cual se han desarrollado modelos LRN-k-epsilon (Low Reynolds Number) que abordan esta problemática (Chien, 2012).

Modelo $k - \omega$, propuesto por (Wilcox, 1988), captura de mejor manera el flujo cerca a los muros que el modelo k-epsilon. Esto debido a que utiliza ω la frecuencia turbulenta en lugar de la tasa de disipación de turbulencia ε . Dentro del campo de flujo, este modelo es inferior. La viscosidad turbulenta se calcula a partir de

$$\eta_t = \rho \frac{k}{\omega}$$

Donde $\omega = \varepsilon/k$. Además, las ecuaciones de transporte para k y ω son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\rho k)}{\delta t} + \frac{\delta(\rho k v_i)}{\delta i} &= \frac{\delta}{\delta j} \left[\left(\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_k} \right) \frac{\delta k}{\delta j} \right] + \frac{\delta v_j}{\delta i} \left(2\eta_t S_{ij} - \frac{2\eta_t}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) - \beta^* \rho k \omega \\ \frac{\delta(\rho \omega)}{\delta t} + \frac{\delta(\rho \omega v_i)}{\delta i} &= \frac{\delta}{\delta j} \left[\left(\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\delta \omega}{\delta j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} \frac{\delta v_j}{\delta i} \left(2\eta_t S_{ij} - \frac{2\eta_t}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) - \beta_1 \rho \omega^2 \end{aligned}$$

Donde $\sigma_k = 2.0$, $\sigma_\omega = 2.0$, $\alpha = 0.52$, $\beta^* = 0.09$ y $\beta_1 = 0.072$

Modelo SST $k - \omega$, Este modelo busca combinar las ventajas de los modelos k-epsilon y k-omega, El modelo SST-k-omega (SST Shear Stress Transport) fue desarrollado por Menter (1993). Utiliza el modelo k-epsilon en el flujo libre y el modelo k-omega cerca del muro, además de utilizar una viscosidad turbulenta modificada que limita los esfuerzos cortantes cuando la presión aumenta. Este modelo es considerado el nuevo estándar en los modelos de turbulencia.

La viscosidad turbulenta se describe como:

$$\begin{aligned} \eta_t &= \frac{\rho a_1 k}{\max(a\omega, \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} F_2)} \\ F_2 &= \tanh(\Phi_2^2) \end{aligned}$$

Donde $\Phi_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d_n}, \frac{500\eta}{\rho\omega d_n^2}\right)$ y d_n es la distancia al muro mas cercano. Además, la ecuación de transporte para k y ω son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\rho k)}{\delta t} + \frac{\delta(\rho k v_i)}{\delta i} &= \frac{\delta}{\delta j} \left[\left(\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_{k3}} \right) \frac{\delta k}{\delta j} \right] + \frac{\delta v_j}{\delta i} \left(2\eta_t S_{ij} - \frac{2\eta_t}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) - \beta^* \rho k \omega \\ \frac{\delta(\rho \omega)}{\delta t} + \frac{\delta(\rho \omega v_i)}{\delta i} &= \frac{\delta}{\delta j} \left[\left(\eta + \frac{\eta_t}{\sigma_{\omega 3}} \right) \frac{\delta \omega}{\delta j} \right] + 2\rho(1 - F_1) \frac{1}{\sigma_{\omega 2}} \frac{\delta k}{\delta j} \frac{\delta \omega}{\delta j} + \alpha_3 \frac{\omega}{k} \frac{\delta v_j}{\delta i} \left(2\eta_t S_{ij} - \frac{2\eta_t}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right) - \beta_3 \rho \omega^2 \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 \sigma_{k3} &= F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2} \\
 \sigma_{\omega 3} &= F_1 \sigma_{\omega 1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \\
 \alpha_3 &= F_1 \alpha_1 + (1 - F_1) \alpha_2 \\
 \beta_3 &= F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2 \\
 F_1 &= \tanh(\Phi^4) \\
 \Phi &= \min \left[\max \left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d_n}, \frac{500\eta}{\rho\omega d_n^2} \right), \frac{4\rho k}{D_\omega \sigma_{\omega 2} d_n^2} \right] \\
 D_\omega &= \max \left(2\rho \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\delta k}{\delta x_j} \frac{\delta \omega}{\delta x_j}, 10^{-10} \right)
 \end{aligned}$$

Las constantes tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 \beta^* &= 0.09 \\
 a &= 0.31 \\
 \sigma_{k1} &= 1.176 \text{ y } \sigma_{k2} = 1.0 \\
 \sigma_{\omega 1} &= 2.0 \text{ y } \sigma_{\omega 2} = 0.168, \\
 \alpha_1 &= 0.556 \text{ y } \alpha_2 = 0.44, \\
 \beta_1 &= 0.075 \text{ y } \beta_2 = 0.0828.
 \end{aligned}$$

2.2.1.2. Modelo de Esfuerzos de Reynolds

Los modelos de viscosidad de Eddy tienen una alta robustez numérica (proporciona resultados estables, precisos y consistentes), pero tiene una clara deficiencia en flujos donde ocurre separación. Estas simulaciones mejoran mediante el uso de los modelos de Esfuerzos de Reynolds. Sin embargo, el esfuerzo computacional se incrementa considerablemente, mientras que la robustez suele decrecer.

No se basan en la hipótesis de Boussinesq, ya que utilizan directamente ecuaciones de transporte para los esfuerzos $v_i'' v_j''$ (Launder et al., 1975). Esto permite considerar los efectos de la anisotropía de la turbulencia, obteniéndose ventajas en los casos donde es de importancia.

2.2.2 Métodos LES (Large Eddy Simulations)

La turbulencia presenta estructuras de dimensiones espaciales y temporales diferentes. Por lo tanto, se pueden dividir en estructuras gruesas de gran escala y finas de pequeña escala. Las estructuras gruesas son más energéticas, por lo que transportan las variables de conservación de manera más efectiva. Un método para modelar estas estructuras es el método LES (Smagorinsky, 1963), el cual computa directamente las estructuras gruesas, mientras que usa para las estructuras finas un modelo de turbulencia. La

Tabla 2 compara las propiedades de este tipo de estructuras.

Tabla 2

Comparación de las propiedades de las estructuras turbulentas gruesas y finas

Escala Grande	Escala Pequeña
Generadas por el flujo promedio	Generadas por las estructuras de gran escala
Dependen de las propiedades geométricas del campo de flujo	Universales
Ordenadas	Estocásticas
Requieren una descripción determinística	Pueden ser modeladas estadísticamente
No homogéneas	Homogéneas
Anisotrópicas	Isotrópicas
Durables	De poca duración
Difusivas	Disipativas
Difíciles modelar	Más sencillas de modelar

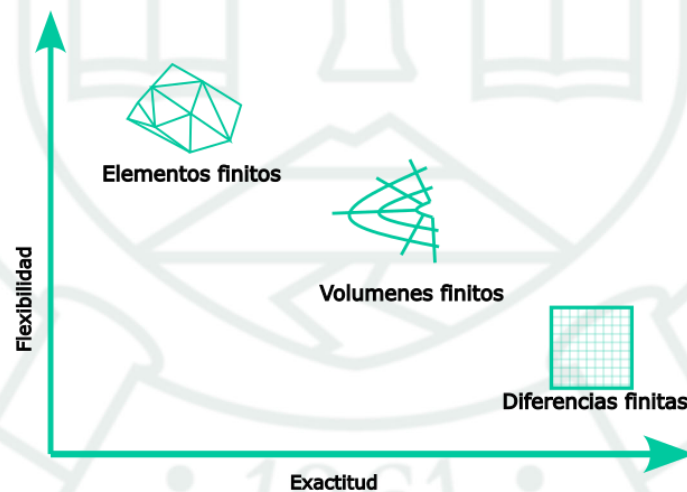
La separación de dichas estructuras se puede dar mediante el uso de filtros (rectangulares, cut-off de Fourier, filtro de Gaussiano), siendo las escalas grandes resueltas directamente en la malla y las escalas pequeñas son modeladas mediante submallas SGS (subgrid-scale). Entre las ventajas se encuentra una representación más realista que los modelos RANS, siendo útil para flujos complejos, mezclas, vórtices o superficies libres. Por otro lado, requiere mallas muy finas y por lo tanto un tiempo de computación mucho más elevado, haciéndolo menos útil para obras ingenieriles de gran tamaño.

2.3. Métodos de Discretización

La solución de las ecuaciones descritas anteriormente solo puede ser resueltas analíticamente para los casos más simples, como flujos estacionarios unidimensionales. Por lo tanto, la mayoría de los casos requieren una solución numérica. Esto se alcanza mediante la discretización de dichas ecuaciones a través de diferentes métodos como; el método de diferencias finitas, el método de volúmenes finitos o el método de elementos finitos.

De los métodos mencionados, el método de diferencias finitas es el que presenta la mayor precisión, mientras que el método de elementos finitos presenta la mayor flexibilidad. Por otro lado, dentro de la dinámica de fluidos computacionales el método de volúmenes finitos es el que más relevancia ha adquirido (Versteeg & Malalasekera, 2007), dado a su buen balance entre precisión y flexibilidad, como se muestra en la Figura 5. Cabe resaltar que las derivadas con respecto al tiempo son, por lo general, aproximadas mediante el método de diferencias finitas aun cuando las derivadas espaciales son discretizadas con otros métodos. Esto debido a que el método de diferencias finitas es muy eficaz en procesos de transporte de una sola dirección como lo es el tiempo (LeVeque, 2007).

Figura 5
Métodos de discretización



Nota: Elaboración propia

2.3.1 Método de Diferencias Finitas

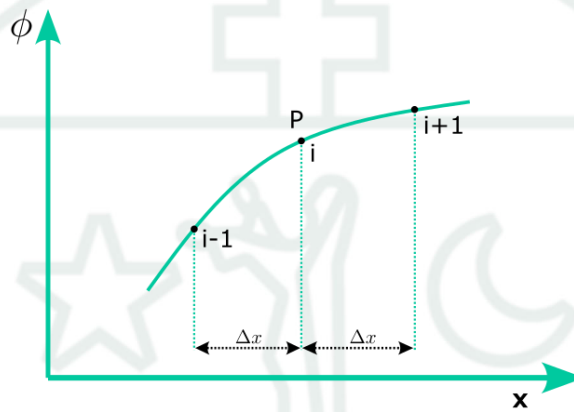
Este método otorga una gran precisión, pero se ve restringido a mallas estructuradas con una calidad alta de mallado (Conley et al., 2020).

2.3.1.1. Discretización de Derivadas Parciales de Primer Orden

Siendo el método más simple, se basa en la aproximación de las diferenciales δ/δ_x , δ/δ_y y δ/δ_z por las diferencias Δ/Δ_x , Δ/Δ_y y Δ/Δ_z .

Figura 6

Aproximación de diferenciales



Nota: Elaboración propia

Donde ϕ representa cualquiera de las variables del flujo. La **Figura 6** muestra ϕ en la dirección del eje x , el mismo que es dividido en intervalos equidistantemente Δx , en cuyos límites se tiene que determinar los valores de la función buscada. Dada la expansión de la Serie de Taylor, se puede generalizar para ϕ en un punto P en la dirección x .

$$\phi = \phi_i + (x - x_i) \frac{\delta \phi}{\delta x} + \frac{(x - x_i)^2}{2} \frac{\delta^2 \phi}{(\delta x)^2} + \frac{(x - x_i)^3}{6} \frac{\delta^3 \phi}{(\delta x)^3} + \dots$$

Sustituyendo x con x_{i+1} y x_{i-1} , se obtiene:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{\delta \phi}{\delta x} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \frac{\delta^2 \phi}{(\delta x)^2} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6} \frac{\delta^3 \phi}{(\delta x)^3} + \dots$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i + (x_{i-1} - x_i) \frac{\delta \phi}{\delta x} + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2} \frac{\delta^2 \phi}{(\delta x)^2} + \frac{(x_{i-1} - x_i)^3}{6} \frac{\delta^3 \phi}{(\delta x)^3} + \dots$$

Truncado las series al primer poder:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{\delta\phi}{\delta x} + R_2 \quad \text{Ec. 9}$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i + (x_{i-1} - x_i) \frac{\delta\phi}{\delta x} + R_2 \quad \text{Ec. 10}$$

Siendo R_2 el residual

Reorganizando las anteriores ecuaciones para obtener la derivada de ϕ

$$\frac{\delta\phi}{\delta x} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \frac{R_2}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta x} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} - \frac{R_2}{\Delta x}$$

$R_2/\Delta x$ es conocido como “error de aproximación de primer orden”. Omitiendo este termino se obtiene.

$$\frac{\delta\phi}{\delta x} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad \text{Ec. 11}$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta x} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{Ec. 12}$$

En la Ecuación 11, las diferenciales $\delta/\delta x$ se aproximan por la llamada “diferencia progresiva de primer orden”, y en la Ecuación 12 por la “diferencia regresiva de primer orden”. Las diferencias progresivas y regresivas presentan precisión de primer orden, lo que no es suficiente para soluciones continuas. Tomando la diferencia de las Ecuaciones 9 y 10 se obtiene:

$$\phi_{i+1} - \phi_{i-1} = 2\Delta x \frac{\delta\phi}{\delta x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\delta^3\phi}{(\delta x)^3} + 2 \frac{(\Delta x)^5}{120} \frac{\delta^5\phi}{(\delta x)^5} \dots$$

Truncando esta serie al primer poder se obtiene

$$\phi_{i+1} - \phi_{i-1} = 2\Delta x \frac{\delta\phi}{\delta x} + R_3$$

Resolviendo $\delta\phi/\delta x$ y ignorando R_3

$$\frac{\delta\phi}{\delta x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}$$

Esta diferenciación es llamada “diferencia central de segundo orden”, ya que el residual R_3 solo incluye términos con poderes superiores a la segunda potencia. Esta discretización de segundo orden es exacta, y resulta suficiente para los modelos computacionales de fluidos.

Para problemas donde el flujo presenta discontinuidades como choques de compresión o bordes, la diferencia central no puede ser usada (Anderson, 1995), dada la necesidad de un curso continuo de las variables del flujo. Por lo que es necesario utilizar diferencias progresivas o regresivas para estas zonas discontinuas.

2.3.1.2. Discretización de Derivadas Parciales de Segundo Orden

En las ecuaciones de conservación incluyen derivadas parciales de segundo orden de variable única ($\delta^2/\delta x^2, \delta^2/\delta y^2, \delta^2/\delta z^2$) y de variables mixtas ($\delta^2/\delta x\delta y, \delta^2/\delta x\delta z, \delta^2/\delta y\delta z$).

La derivada de segunda orden con respecto a una variable única puede ser discretizada usando diferencias progresivas y regresivas. Sumando las ecuaciones:

$$\phi_{i+1} + \phi_{i-1} = 2\phi_i + 2\frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\delta^2 \phi}{(\delta x)^2} + 2\frac{(\Delta x)^4}{24} \frac{\delta^4 \phi}{(\delta x)^4} + \dots$$

Truncando la serie luego del segundo poder, y despejando la ecuación para $\delta^2 \phi / (\delta x)^2$ y ignorando el residual, se obtiene:

$$\frac{\delta^2 \phi}{(\delta x)^2} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

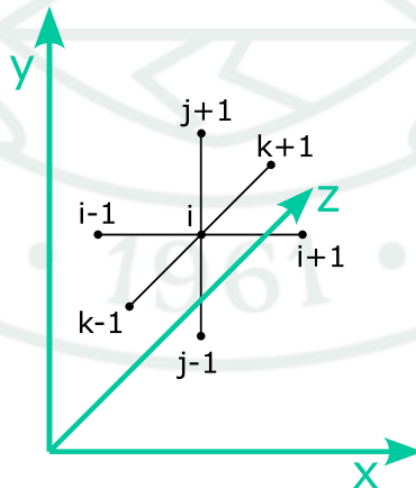
La segunda derivada de variables mixtas puede ser aproximada usando diferencias centrales, aproximando la primera derivada $\delta \phi / \delta x$ y luego $\delta \phi_{i+1} / \delta y$ y $\delta \phi_{i-1} / \delta y$ de la misma manera siguiendo la indexación establecida en la **Figura 7**, obteniendo se:

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x \delta y} \approx \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$$

De la misma manera, las diferentes expresiones se forman en las otras direcciones.

Figura 7

Notación para el espacio computacional para el método de diferencias finitas



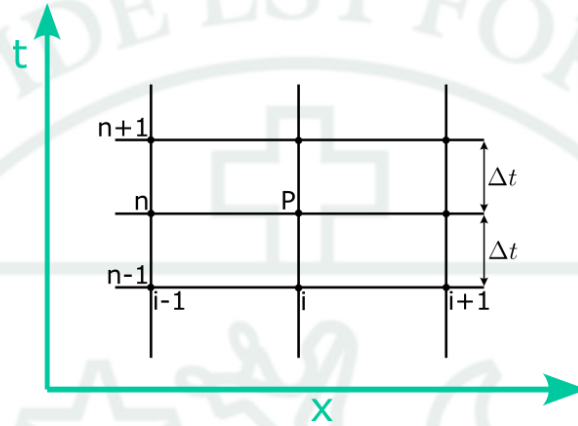
Nota: Elaboración propia

2.3.1.3. Discretización Temporal

La **Figura 8** muestra los índices de los intervalos de tiempo empezando por t_{n-1} , donde el tiempo es dividido en intervalos equidistantes Δt en cuyos límites los valores de las funciones serán determinados.

Figura 8

Índices para la discretización temporal



Nota: Elaboración propia

La discretización temporal puede ser resuelta con una diferencia progresiva:

$$\frac{\delta \phi}{\delta t} \approx \frac{\phi_{i,n+1} - \phi_{i,n}}{\Delta t}$$

No es posible aplicar una diferencia regresiva, ya que la solución se encuentra en el tiempo t_{n+1} .

Se hace una distinción para la diferencia progresiva, entre dos procedimientos, explícitos e implícitos, dependiendo en el intervalo temporal en el que la derivada temporal ocurre. En el procedimiento explícito, los valores a determinar de t_{n+1} pueden ser determinado directamente del pasado:

$$\frac{\delta \phi_{i,n}}{\delta t} \approx \frac{\phi_{i,n+1} - \phi_{i,n}}{\Delta t}$$

El tamaño del intervalo temporal Δt se elige para cumplir condiciones de estabilidad. Por lo que el número de Courant debe ser menor a 1. Este número es una medida de cuantas celdas son atravesadas por el flujo durante un intervalo de tiempo.

$$C = v \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

El método implícito no tiene restricciones para el intervalo temporal, teniendo este solo influencia en la precisión. Si bien los requerimientos mayores de memoria representan una desventaja, la estabilidad numérica es una gran ventaja.

$$\frac{\delta\phi_{i,n+1}}{\delta t} \approx \frac{\phi_{i,n+1} - \phi_{i,n}}{\Delta t}$$

2.3.2 Método de Volúmenes Finitos

El método de volúmenes finitos a diferencia del método de diferencias finitas no considera puntos individuales para el cálculo de las ecuaciones de conservación, si no volúmenes de control denominados celdas que conforman una malla computacional (Harlow & Welch, 1965). Geométricamente, las celdas pueden adquirir cualquier forma (como los ejemplos de la **Figura 9**), lo que permite la construcción de dominios computacionales complejos.

Figura 9

Formas de los volúmenes de control

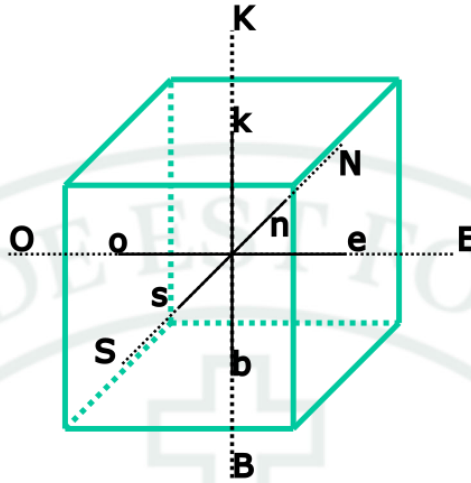


Nota: Elaboración propia

Estos volúmenes de control son diferenciados con una notación que varía si la malla es estructurada o no estructurada. Así, cada celda tiene un nodo central P , independientemente del tipo de malla. Por ejemplo, en el caso de una malla estructurada, las celdas vecinas tienen de igual manera nodos centrales denominados O (oeste), E (este), N (norte), S (sur), K (arriba) y B (abajo) como se muestra en la Figura 10. Las áreas entre los nodos de la celda P y un nodo vecino son etiquetadas con el subíndice del nodo vecino en minúsculas. Por ejemplo, el área entre P y O se denominaría A_o , el área entre P y E se denominaría A_e . Los puntos de conexión entre dos nodos centrales se etiquetan con el índice en minúsculas de la celda vecina. Por ejemplo, entre el nodo P y O se encuentra el punto o , entre el nodo P y E se encuentra el punto e .

Figura 10

Notación para una malla estructurada correspondiente al método de volumen finito



Nota: Elaboración propia

Para una malla no estructurada se usa una notación diferente. En este, los nodos centrales son enumerados. Para la descripción del método de volúmenes finitos se parte de la forma general de las ecuaciones de conservación en estado estacionaria:

$$\dot{Q} + \vec{\nabla} \cdot \Gamma \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla} \cdot (\rho \phi \vec{v})$$

Para la discretización temporal en la dinámica de fluidos computacional se utiliza el Método de Diferencias Finitas, dado que la discretización temporal no está relacionada necesariamente con la ubicación.

Integrando la ecuación anterior para cualquier volumen de control, se obtiene

$$\iiint_{(V)} \dot{Q} dV = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot \Gamma \vec{\nabla} \phi dV = \iiint_{(V)} \vec{\nabla} \cdot (\rho \phi \vec{v}) dV$$

El teorema de integración de Gauss indica que los términos convectivos y difusivos pueden ser convertidos de integrales volumétricas a integrales de superficie:

$$\iiint_{(V)} \dot{Q} dV = \iiint_{(A)} \Gamma (\vec{\nabla} \phi \cdot \vec{N}) dA = \iiint_{(A)} \rho \phi (\vec{v} \cdot \vec{N}) dA$$

Donde A es el área entre el volumen de control y los volúmenes de control adyacentes, $\vec{N}$ es el vector normal perpendicular a la superficie dA .

2.3.2.1. Discretización de los Términos

La integral del término fuente se discretiza según

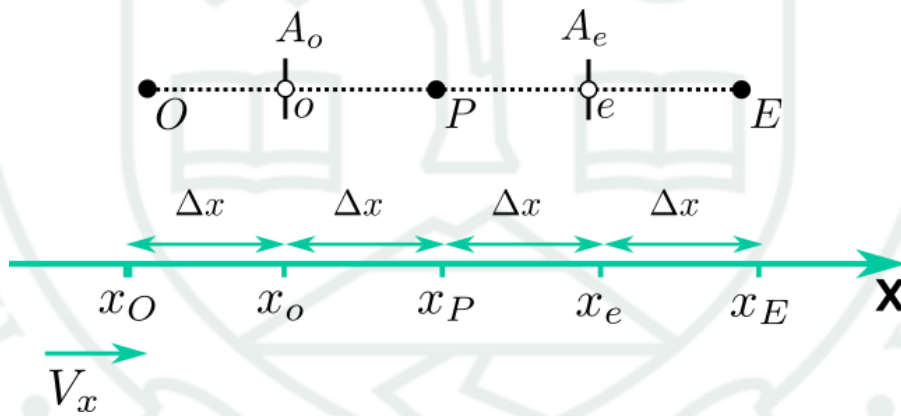
$$\iiint_{(V)} \dot{Q} dV = \bar{Q}V$$

$\bar{Q}$ es el flujo fuente promedio, depende en muchos casos de ϕ . Esta dependencia puede ser aproximada linealmente. En los casos que la dependencia no sea lineal, $\bar{Q}$ debe ser tratado iterativamente empezando de un valor estimado. V es el volumen de la celda.

La discretización del término difusivo se da mediante la utilización de una malla unidimensional uniforme en la dirección del eje x , como se muestra en la **Figura 11**, aunque esto prácticamente no ocurra nunca. Sin embargo, para simplificar la transferencia de dimensiones más altas, las caras de las celdas son incluidas. Hay varias adiciones para la discretización de celdas irregulares, descritas en (Hirsch, 2007).

Figura 11

Discretización unidimensional



Nota: Elaboración propia

El enfoque del método de Volúmenes Finitos permite una discretización conservativa, lo que implica la conservación de los flujos a través de los límites de un volumen de control. Por lo tanto, el termino difusivo puede ser resuelto como:

$$\Gamma_o A_o \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_o - \Gamma_w A_w \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_w = 0$$

Los coeficientes de difusión Γ_o y Γ_w son por lo general conocidos en sus dependencias con, por ejemplo, la presión o la temperatura. Si las propiedades del material son dependientes en ϕ , se estiman al comienzo y luego se mejora iterativamente. Las áreas A_o y A_w son conocidas en la malla. Las derivadas de ϕ son aproximadas por el método de diferencias centrales como en el método de diferencias finitas, usando ϕ en P, W y O , ya que las cantidades de balance son calculadas en los nodos centrales del volumen de control

$$\Gamma_o A_o \frac{\phi_o - \phi_P}{x_o - x_P} - \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{x_W - x_P} \approx 0$$

Ordenando la ecuación se obtiene:

$$\left(\frac{\Gamma_o A_o}{x_o - x_P} + \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \right) \phi_P \approx \left(\frac{\Gamma_o A_o}{x_o - x_P} \right) \phi_o + \left(\frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \right) \phi_W$$

Análogamente al procedimiento seguido para el termino difusivo, el termino convectivo es discretizado similarmente:

$$\rho_o v_{xo} A_o \phi_o - \rho_w v_{xw} A_w \phi_w = 0$$

Las velocidades v_{xo} y v_{xw} se asumen como conocidas en la superficie de la celda. Si dependen de ϕ , deben ser primero estimadas y luego mejoradas iterativamente.

Como en el término difusivo, ϕ_o, ϕ_w son aproximados a partir de ϕ . Existiendo numerosos métodos para este propósito, como el método de diferencias centrales o el método upwind.

El método de diferencias centrales calcula ϕ en el área de la celda mediante interpolación lineal entre su valor y el de las celdas vecinas. Siendo para la malla unidimensional anteriormente mostrada:

$$\phi_w \approx \frac{\phi_W + \phi_P}{2}$$

$$\phi_o \approx \frac{\phi_P + \phi_O}{2}$$

Este método es simple, pero presenta desventajas como la tendencia a oscilar numéricamente y solo es estable para mallas con números de Peclet menores a 2. Este número determina la razón entre convección y difusión. Además, tiende al infinito cuando la difusión es pequeña con respecto a la convección. Para número de Peclet menores, solo la difusión juega un rol importante.

En el método upwind, ϕ en la cara de la celda es remplazado por el ϕ de la celda vecina agua arriba. Para este caso sería:

$$\phi_w \approx \phi_W$$

$$\phi_o \approx \phi_P$$

Este método es robusto, sin embargo, presenta desventajas ya que tiende a aplanar los gradientes cuando las líneas de la grilla no son paralelas al flujo. Este efecto es conocido como “difusión numérica”.

Como en el método de diferencias finitas, se puede incrementar el orden del error al incluir puntos adicionales en la aproximación de los gradientes. Para esto, el método de tercer orden de error QUICK (quadratic upstream interpolation for convective kinetics) puede ser usado. En este, se consideran dos puntos aguas arriba y un punto aguas abajo para la aproximación del valor en las superficies de las celdas. Este método es inestable para números de Peclet altos, pero exhibe menores errores de discretización y menor difusión numérica dado a su mayor orden de error. Sin embargo, su desventaja está en que la solución se dispara o se atenúa de sobremanera en altos gradientes de ϕ .

Finalmente, juntando los términos del término convectivo utilizando el método upwind:

$$\left(\rho_o v_{xo} A_o + \frac{\Gamma_o A_o}{x_o - x_P} + \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \right) \phi_P = \left(\rho_w v_{xw} A_w + \frac{\Gamma_w A_w}{x_P - x_W} \right) \phi_W + \left(\frac{\Gamma_o A_o}{x_o - x_P} \right) \phi_o + \bar{Q}$$

Se denotan los prefactores

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_o \phi_o + \bar{Q}$$

Para el volumen de control la ecuación se expande

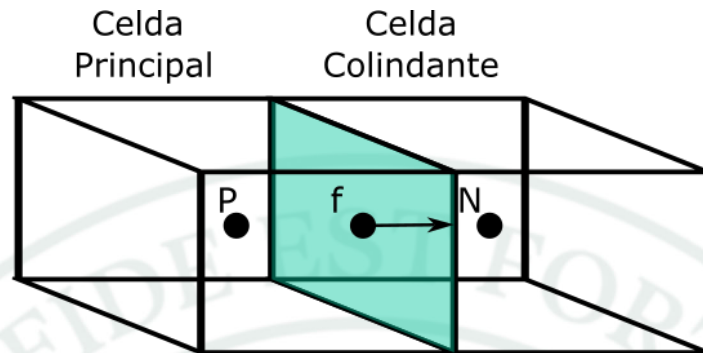
$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_o \phi_o + a_S \phi_S + a_K \phi_K + a_B \phi_B + \bar{Q}$$

2.3.2.2. Esquemas de Discretización

La dinámica de fluidos computacional calcula los valores en el centroide de las celdas (P). Sin embargo, las operaciones se ejecutan en las caras de las celdas (f). Así, cada cara conecta una celda principal (P) con una celda colindante (N) como se muestra en Figura 12, por lo que no importa el número de caras de la celda, lo que hace que estos esquemas de discretización sean validos incluso para celdas poliédricas como se ilustra en la Figura 13.

Figura 12

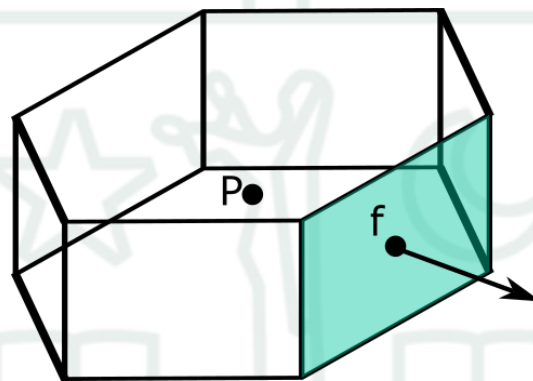
Operación entre celdas hexaédricas



Nota: Elaboración propia

Figura 13

Operaciones en celdas poliédricas



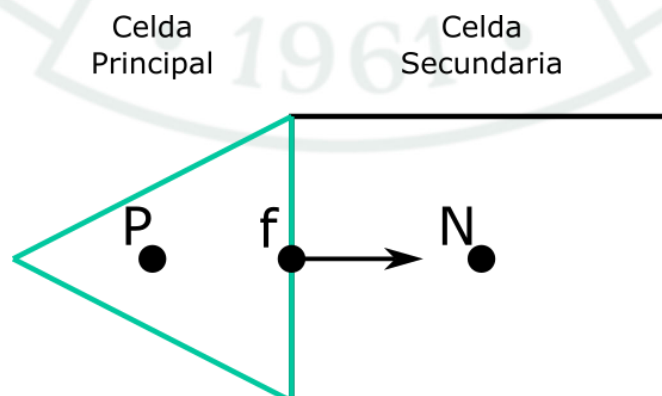
Nota: Elaboración propia

El cálculo es independiente de las otras caras, por lo tanto, no es necesaria la información de las caras opuestas, lo mismo que permite trabajar sin ninguna restricción con mallas triangulares, tetraédricas o mallas no estructuradas como se muestra en la Figura 14.

Figura 14

Figura 14

Operaciones entre celdas con geometrías diferentes

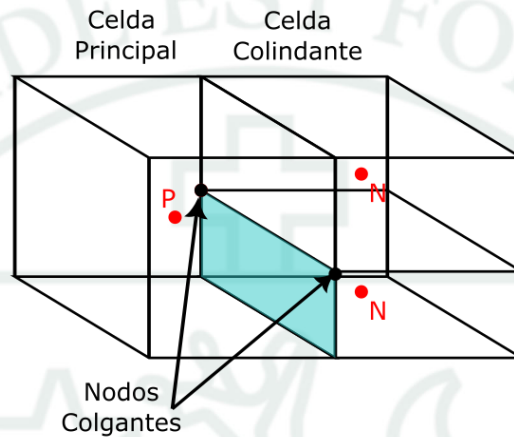


Nota: Elaboración propia

Este análisis es similar para el caso de “nodos colgantes” que se muestra en la Figura 15, ya que las operaciones solo involucran a la cara que comparten y los centroides de la celda propietaria y la colindante.

Figura 15

Nodos colgantes entre celdas

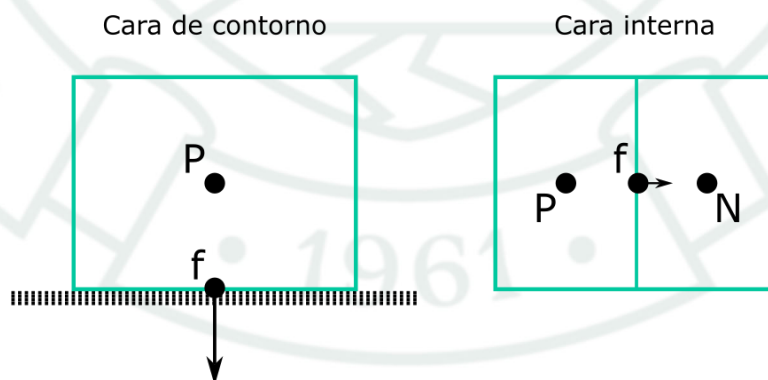


Nota: Elaboración propia

La mayoría de las caras de una malla son caras internas, sin embargo, existen también caras de contorno que requieren un tratamiento especial (funciones de pared), la diferencia de este tipo de caras se muestra en la Figura 16.

Figura 16

Caras de contorno e internas

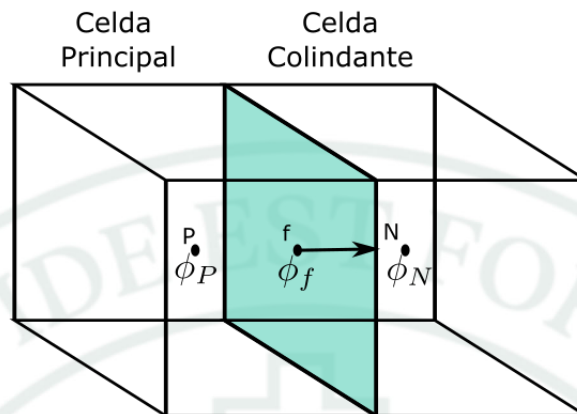


Nota: Elaboración propia

A partir del valor conocido de una cantidad ϕ (velocidad, presión o temperatura) en el centroide de la celda propietaria ϕ_P y en el centroide de la celda colindante ϕ_N dispuestos según la Figura 17, se busca determinar el valor de esa cantidad en la cara compartida ϕ_f .

Figura 17

Determinación del valor de la cantidad ϕ en la cara compartida



Nota: Elaboración propia

Las diferentes maneras de encontrar este valor son conocidas como esquemas de discretización o más apropiadamente esquemas de interpolación en caras, los que se describen a continuación.

a. Upwind, son los esquemas más utilizados para la discretización del término convectivo. Este esquema depende de la dirección de flujo másico (F), más precisamente la tasa de flujo másico a través de la cara compartida.

$$F_f = \rho_f A_f (U_f \cdot \hat{n})$$

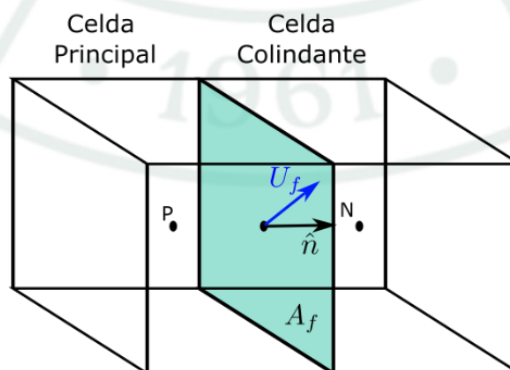
$$F_f > 0, \text{flujo saliendo de la celda}$$

$$F_f < 0, \text{flujo entrando a la celda}$$

Este flujo está definido por la densidad, el área y el producto punto de la velocidad y el vector unitario de la cara en cuestión como se muestra en la Figura 18.

Figura 18

Definición de la dirección del flujo entre dos celdas



Nota: Elaboración propia

Es así como una vez determinado la dirección del flujo másico se puede definir el valor en la cara compartida según:

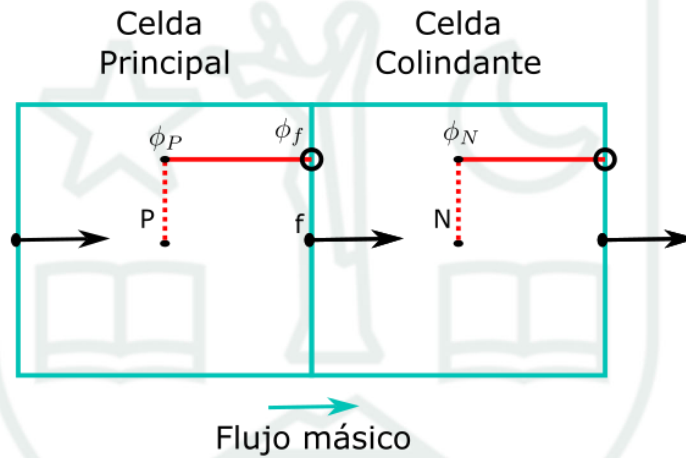
$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & F_f > 0 \\ \phi_N & F_f < 0 \end{cases}$$

Esto implica que el valor buscado no varía al ser una proyección del valor de la celda propietaria como se aprecia en la

Figura 19, por lo tanto, este es un esquema de primer orden. Por lo tanto, la solución no es correcta, las estructuras del flujo pierden resolución, lo que hace que la física del flujo no sea correctamente representada. A pesar de esto, es el esquema más estable en flujos que son dominados por la convección, por lo que se usan para generar una solución inicial y estable.

Figura 19

Esquema de discretización upwind



Nota: Elaboración propia

b. Linear (diferenciación central), también conocido como diferenciación de segundo orden. A partir de la distancia entre los centroides y la distancia entre centroide propietario y la cara compartida como se muestra en la Figura 20. Considera una relación lineal entre los centroides e interpola linealmente para obtener el valor en la cara.

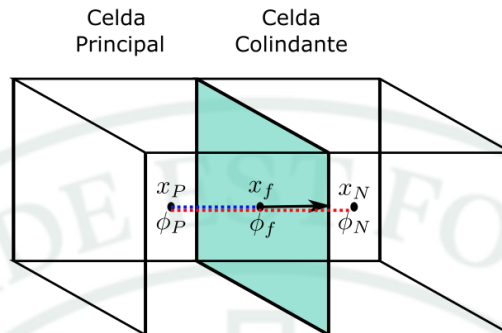
$$\phi_f = \psi \phi_N + (1 - \psi) \phi_P$$

$$\psi = \frac{|x_f - x_P|}{|x_N - x_P|} = \frac{\text{Azul}}{\text{Rojo}}$$

$$0 \leq \psi \leq 1$$

Figura 20

Distancia entre centroides y entre centroide y cara compartida

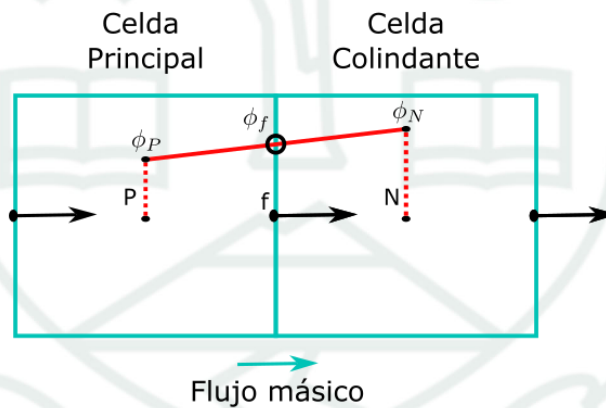


Nota: Elaboración propia

Como la variación es lineal es esquema es de segundo orden de precisión como se muestra en la Figura 21, pero “no acotada”, es decir que es susceptible a oscilar de manera no física.

Figura 21

Esquema de discretización lineal



Nota: Elaboración propia

Este esquema es utilizado en el término difusivo (vinculado a la viscosidad, cizallamiento y el mezclado). Sin embargo, para el termino convectivo este esquema no debe ser utilizado al utilizar modelos RANS, ya que, al ser un esquema no acotado, podría generar oscilaciones no físicas. Por otro lado, para modelos LES, si podría ser utilizados en el término convectivo ya que estos requieren una mayor exactitud para preservar las características del campo de flujo.

$$\frac{\delta U}{\delta t} + \underbrace{\nabla \cdot (UU)}_{\text{Término convectivo}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underbrace{\nu \nabla^2 U}_{\text{Término difusivo}} + g$$

c. **Linear upwind**, es un esquema muy popular, y más exacto que el método upwind ya que usa el gradiente para mejorar la exactitud de la extrapolación.

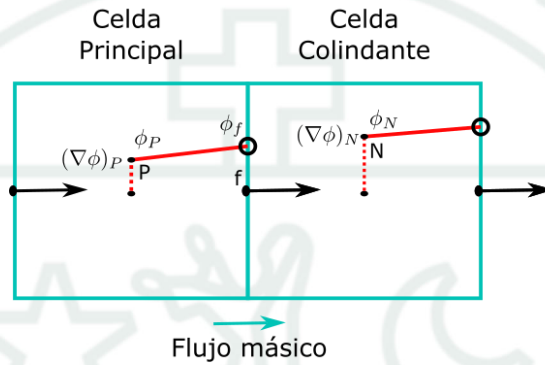
$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P + (\nabla\phi)_P \cdot r & F_f > 0 \\ \phi_N + (\nabla\phi)_N \cdot r & F_f < 0 \end{cases}$$

La variación entre el centroide y la cara es lineal como se muestra en la

Figura 22, por lo tanto, se trata de un método de segundo orden de precisión.

Figura 22

Esquema de discretización linear upwind



Nota: Elaboración propia

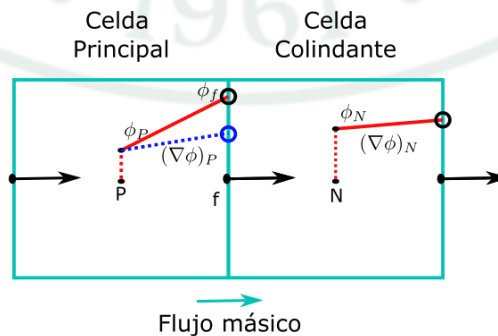
Es comúnmente usado en el término convectivo, sin embargo, es más inestable que el método upwind. Ya que usa el gradiente para la interpolación, si este es muy grande el valor calculado en la cara podría exceder los rangos de las celdas colindantes. Por lo tanto, es necesario limitar el gradiente para prevenir este efecto como se muestra en la **Figura 23**. Por otro lado, si se toma como limitador el valor de 0, sería lo mismo que aplicar el esquema upwind.

$$\phi_f = \phi_P + \gamma(\nabla\phi)_P \cdot r$$

$$0 \leq \gamma \leq 1$$

Figura 23

Limitador de gradiente para el esquema linear upwind



Nota: Elaboración propia

d. Esquemas de discretización avanzados, estos esquemas usan una combinación del esquema linear y del esquema upwind, introduciendo una función que cambia entre uno y otro a lo largo de la malla según sea más conveniente, por ejemplo, en un área donde aparecen oscilaciones con comportamiento no físico se utilizaría un mayor porcentaje del esquema upwind para remover las oscilaciones, mientras que en los lugares donde la solución sea estable se tendería más a usar el esquema linear, esto con el objetivo de obtener lo mejor en términos de estabilidad y precisión.

$$\phi_f = \Psi \phi_{UD} + (1 - \Psi) \phi_{CD}$$

2.3.3 Procedimientos de Solución

Para flujos incompresibles, existe el “problema de acoplamiento presión-velocidad” de las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \frac{\delta \mathbf{U}}{\delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{g} \end{aligned}$$

Claramente existen 4 ecuaciones con 4 incógnitas (p, u_i, u_j, u_z). Sin embargo, la ecuación de continuidad se puede considerar una restricción al cálculo del campo de momentos. Es decir, primero se resuelve las ecuaciones y luego se verifica si satisfacen la ecuación de continuidad.

La discretización de los términos permite obtener un sistema de ecuaciones lineales que forman matrices dispersas. El sistema puede ser generalizado de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathcal{M}\mathbf{U} = -\nabla p}$$

$\mathcal{M}$ es la matriz de coeficientes, obtenidos a partir de la discretización de los términos de las ecuaciones de conservación usando el método de Volúmenes Finitos, según los esquemas de discretización elegidos para los términos difusivos, convectivos, etc. Esta ecuación es resuelta utilizando la presión de iteraciones previas. Esta etapa es llamada “**Etapa de predicción del momento**”. Aquí el gradiente de presión es un término fuente explícito.

Adicionalmente, la matriz $\mathcal{M}$ se puede descomponer en su componente diagonal $\mathcal{A}$ (o a_p).

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & M_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_{n,n} \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz $\mathcal{A}$ fácilmente calculable.

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/M_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/M_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/M_{n,n} \end{pmatrix}$$

El termino $\mathcal{M}U$ puede ser rescrito:

$$\mathcal{M}U = \mathcal{A}U - \mathcal{H}$$

Reordenando para $\mathcal{H}$

$$\boxed{\mathcal{H} = \mathcal{A}U - \mathcal{M}U}$$

Siendo $\mathcal{H}$ la matriz residual, luego de extraída la diagonal de $\mathcal{M}$. Esta matriz es necesaria para el calculo de la presión corregida.

La descomposición $\mathcal{M}U$ puede ser usada para derivar la ecuación de la presión:

$$\mathcal{A}U - \mathcal{H} = -\nabla p$$

Multiplicando por $\mathcal{A}$ y reorganizando, se obtiene la etapa corrección del momento explícito.

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}U = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1}\nabla p$$

$$\boxed{U = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1}\nabla p}$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot U = 0$$

$$\boxed{\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{H}) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1}\nabla p)}$$

Las ecuaciones demarcadas son utilizadas para resolver el acoplamiento entre presión-velocidad. Primero calcula la velocidad con el predictor de momento, con los valores de presión de la anterior iteración.

$$\mathcal{M}U = -\nabla p$$

Extrae la matriz diagonal $\mathcal{A}$ de la matriz $\mathcal{M}$, y calcula la matriz de residuales $\mathcal{H}$ utilizando el campo de velocidades computado en el paso anterior.

$$\mathcal{H} = \mathcal{A}U - \mathcal{M}U$$

Luego, se calcula la ecuación de la presión a partir de los valores de $\mathcal{H}$

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \nabla p) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \mathcal{H})$$

El campo de presiones calculado, se usa para corregir el campo de velocidades, para que se satisfaga la ecuación de continuidad. Esta es la “etapa de corrección explícita de la presión”. Ahora la velocidad es correcta, pero la presión no satisface las ecuaciones dado que el termino fuente $\mathcal{H}$ depende de U el que acaba de ser modificado. Se procede utilizando alguno de los algoritmos descritos a continuación.

2.3.3.1. SIMPLE

Este algoritmo introducido por Caretto et al. (1973) y Patankar & Spalding (1972), resuelve el predictor de momento una vez más y lo usa para actualizar $\mathcal{H}$

$$\mathcal{M}U = -\nabla p$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{A}U - \mathcal{M}U$$

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \nabla p) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \mathcal{H})$$

$$U = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1} \nabla p$$

Estos son conocidos como loops de corrección externa.

Este método es recomendado para flujos estacionarios, ya que no tienen derivadas temporales. Sin embargo, requieren un “sub-relajamiento” para artificialmente incrementar la dominancia diagonal de la matriz.

2.3.3.2. PISO

Introducido por (Issa, 1986), este algoritmo corrige $\mathcal{H}$ directamente con el valor de U obtenido. Por lo que soluciona el predictor de momento una sola vez.

$$\mathcal{M}U = -\nabla p$$

Luego ejecuta loops de corrección interna hasta que la ecuación de presión converja.

$$\mathcal{H} = \mathcal{A}U - \mathcal{M}U$$

$$\nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \nabla p) = \nabla \cdot (\mathcal{A}^{-1} \mathcal{H})$$

$$U = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{H} - \mathcal{A}^{-1} \nabla p$$

Se recomienda su uso par flujos incompresibles no estacionarios, ya que si se garantiza un numero de Courant menor a 1, basa con un predictor de momento y un par de correctores de presión para que la solución converja. Consecuentemente, no se necesita “sub-relajamiento” de los términos debido a los números de Courant y a la fuerte dominancia diagonal.

2.3.3.3. PIMPLE

Este método combina los controles de los métodos anteriores (Weller et al., 1998), sobre todo los loops iterativos de PISO y los factores de “sub-relajamiento” de SIMPLE. Además, permite mantener la precisión temporal con números de Courant mayores a uno mediante el uso de esquemas de discretización de segundo orden para el tiempo (e.i. Esquema Regresivo, Esquema de Crank-Nicolson, etc) y de los loops de PIMPLE.

2.3.4 Condiciones de Frontera

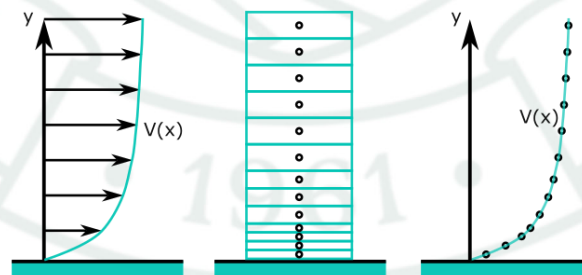
Son necesarias por lo general en los puntos de entrada, salida y en los muros. Se deben especificar las suficientes, para que el problema no este sobre determinado ni sub determinado. Así, en las entradas las condiciones de frontera son en su mayoría conocidas o pueden ser fácilmente estimadas. Por ejemplo, la componente normal al muro de la velocidad suele ser 0, dado que el flujo no penetra el muro. Para los casos de fluidos friccionales, por lo general las partículas no tienen velocidad tangencial en el muro.

2.3.4.1. Funciones de pared

Ya que las gradientes de cantidades como la velocidad o la temperatura son grandes cerca de la pared, se necesita una malla más fina para poder resolver estos gradientes. Sin embargo, estas celdas más delgadas presentan alta relación de aspecto como se muestra en la Figura 24, y en consecuencia una malla de menor calidad, y con muchas más celdas, lo que incrementa el tiempo de computación.

Figura 24

Malla con mayor densidad de celdas cerca de las paredes

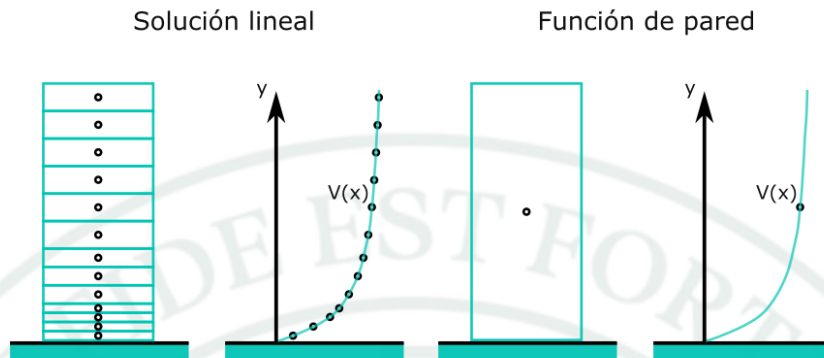


Nota: Elaboración propia

Entonces, es posible modelar la variación entre la pared y el centroide de la celda contigua de manera no lineal, de tal modo que no se tengan que generar tantas celdas adicionales como se muestra en la **Figura 25**, mejorando la estabilidad del modelo y reduciendo el tiempo de computación.

Figura 25

Aproximación lineal de la velocidad y a partir de funciones de pared

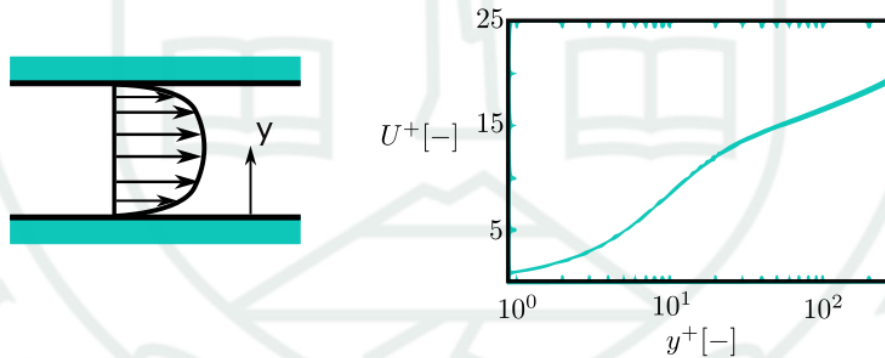


Nota: Elaboración propia

A partir de datos experimentales o de modelos DNS, se puede determinar la variación de la velocidad con respecto a la distancia con respecto al muro como se muestra en la Figura 26, esta información puede ser utilizada como modelos de aproximación de la velocidad.

Figura 26

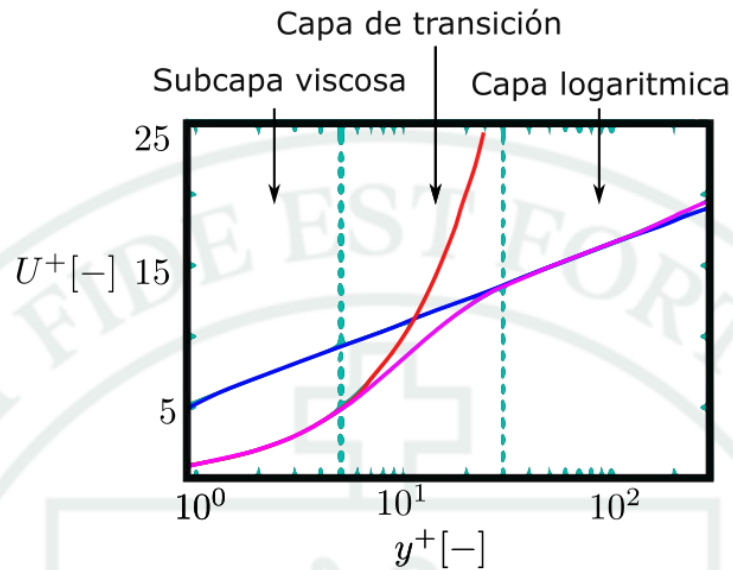
Variación de la velocidad con respecto a la distancia al muro



Nota: Modificado de Kármán (1930)

A partir de aquí surgen estas funciones empíricas que son utilizadas para modelar el comportamiento del fluido cerca a la pared. Estas funciones empíricas están representadas en la Figura 27 por las líneas azul y verde. Además, este perfil se puede dividir en tres regiones. La zona correspondiente a la subcapa viscosas corresponde a valores de y^+ menores a 5. Por otro lado, la región logarítmica corresponde a valores de y^+ mayores de 30. Sin embargo, dentro de la capa buffer, ninguna de las funciones muestra una similitud con el comportamiento observado, de modo que valores de y^+ dentro de esta zona deben ser evitados.

Figura 27
Ley de la pared



Nota: Modificado de Kármán (1930)

Estas funciones se definen matemáticamente

$$U^+ = y^+ \quad y^+ < 5$$

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \log(E y^+) \quad 30 < y^+ < 5$$

Donde κ y E son coeficientes empíricos que toman los valores de 0.4187 y 9.793 respectivamente.

y^+ es la distancia normal al muro adimensional

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$$

U^+ es la velocidad tangencial adimensional son

$$U^+ = \frac{U}{u_\tau}$$

Son representado adimensionalmente para que puedan ser utilizados en todas las situaciones de flujo o geometría posibles. Además, u_τ conocida como velocidad friccional, se basa en el esfuerzo cortante respecto al muro, ya que la velocidad en el muro es cero, se usa esta velocidad como representativa

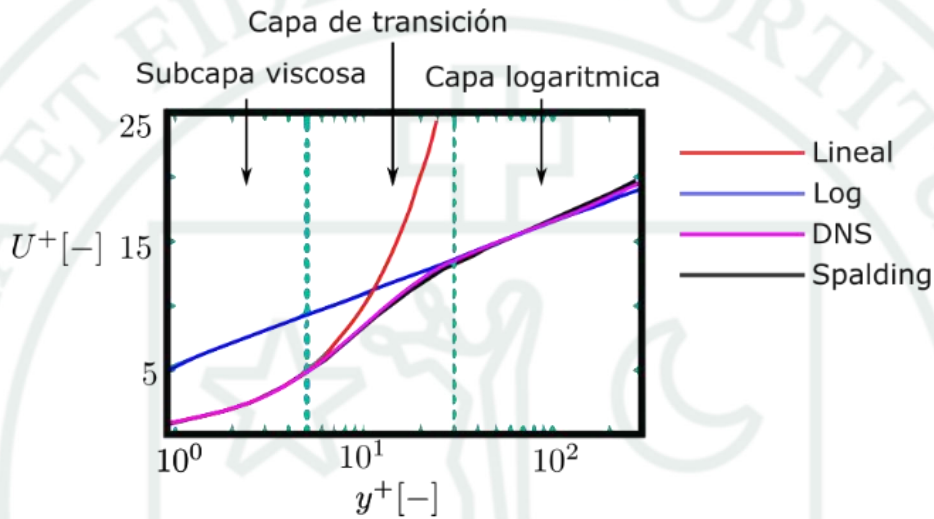
$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Alternativamente, se puede acomodar este comportamiento a una función continua a lo largo de todo y^+ , un ejemplo de esto es la función de pared de Spalding, la cual es valida para $y^+ < 300$ como se muestra en la Figura 28.

$$y^+ = U^+ + 0.118 \left[e^{0.4U^+} - 1 - 0.4U^+ - \frac{1}{2}(0.4U^+)^2 - \frac{1}{6}(0.4U^+)^3 \right]$$

Figura 28

Función continua de la ley de la pared



Nota: Modificado de Spalding (1961)

2.4. Mallado Computacional

El mallado computacional parte de las superficies que comprenden el dominio computacional, estas superficies se descomponen en subdominios para los cuales se busca una solución numérica. Se diferencia dos tipos de mallas; estructuradas y no estructuradas. Las primeras están compuestas por cuboides que se disponen de manera regular a través del dominio computacional, la estructura al ser más simple ofrece menos flexibilidad geométrica (Vivarelli et al., 2025). Por otro lado, las mallas no estructuradas pueden contener incluso tetraedros, pentaedros y sólidos de mayor dimensión, lo que permite que estas mallas sean mucho más flexibles, acomodándose de mejor manera a geometrías complejas, sin embargo, la complejidad de estas mallas tiene como consecuencia tiempos de computación más largos.

Por lo general, se trata que una malla sea lo suficientemente fina y presentar una calidad de celdas apropiada, ya que de lo contrario los resultados computacionales podrían verse afectados por la malla llegándose a generar inestabilidad en el modelo (Katz & Sankaran, 2011). Por esto, es importante establecer pruebas de independencia del mallado, esto implica que los resultados numéricos sean independientes de la malla, es decir que se busca obtener una malla lo suficientemente fina como para que al disminuir el tamaño de las celdas aún más los resultados numéricos se mantengan. Por otro lado, la calidad de la malla puede ser evaluada según criterios de:

- Distorsión, esta medida es respecto a los volúmenes individuales, procurando tener ángulos internos cercanos a 90 grados. El valor deseado es 0.
- Relación de aspecto, representa que tan estirada esta una celda, se debe procurar que este valor no sea inferior a 0,1 o que no exceda a 10.
- Relación de expansión, esta medida el cambio de volumen de una celda con respecto a las celdas contiguas, similarmente al anterior el valor no debe ser inferior a 0,1 ni exceder 10.

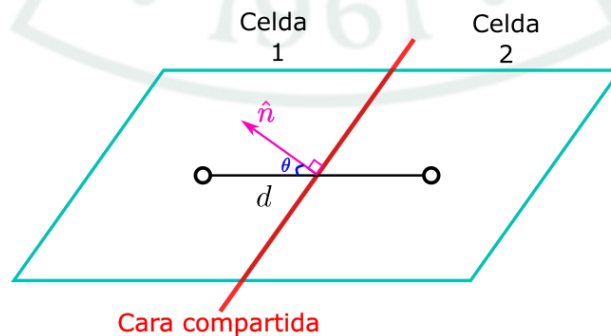
2.4.1 No Ortogonalidad

Considerando dos celdas conectadas por una misma cara como se muestra en Figura 29, sin importar que las celdas sean hexaédricas, tetraédricas, prismas o cualquier poliedro. Existen entre ellas un vector $\mathbf{d}$ que conecta los centroides, y un vector normal a la cara compartida $\hat{\mathbf{n}}$. Además, se forma el ángulo θ entre estos dos vectores, este es el ángulo de ortogonalidad y está definido por:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{d}| |\hat{\mathbf{n}}|} \right)$$

Figura 29

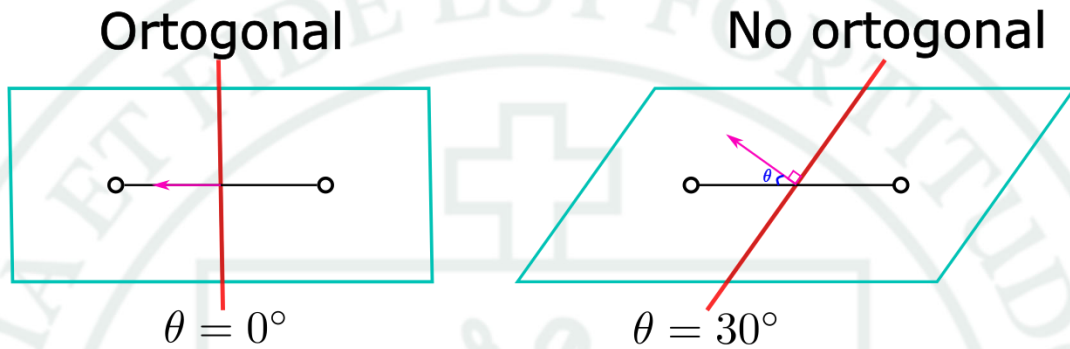
Cara compartida entre dos celdas contiguas



Nota: Elaboración propia

Este tipo de medida es conocida como no-ortogonalidad de cara, y es la que es utilizada por OpenFoam, siendo una cara totalmente ortogonal cuando $\theta = 0^\circ$ y no ortogonal cuando este ángulo varía como se muestra en la Figura 30. Es recomendable tener valores de $\theta < 70^\circ$ para considerar el mallado adecuado.

Figura 30 Celdas ortogonales y no ortogonales

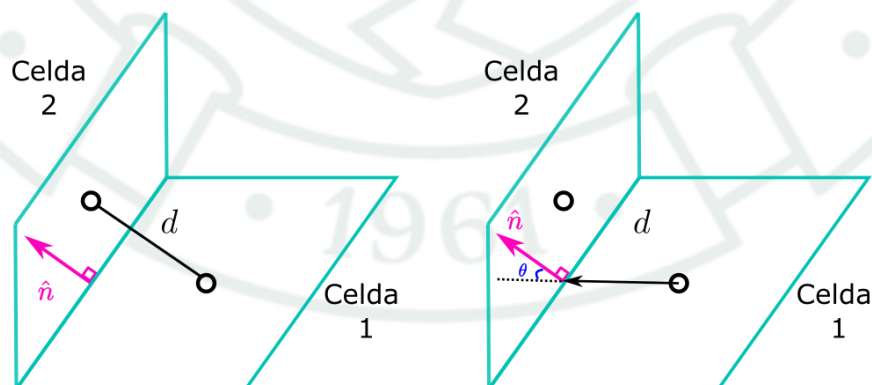


Nota: Elaboración propia

Si consideramos la alineación de las celdas, el vector $\mathbf{d}$ no es tan adecuado ya que como se muestra en la Figura 31 las celdas serian ortogonales al ser $\theta = 0^\circ$, sin embargo, este no es el caso. Es así como, alternativamente, se puede introducir el vector $\mathbf{c}$ el que conecta el centroide con el centro de la cara conectada.

Figura 31

Ángulo de ortogonalidad con respecto a los centroides (izquierda) y con respecto al centro de la cara compartida (derecha)



Nota: Elaboración propia

Esta definición junto a la anterior es la que utiliza ANSYS Fluent y CFX para determinar la no-ortogonalidad, se elige el ángulo mayor entre los dos, según la siguiente ecuación, para definir el concepto de calidad ortogonal. Además, el valor de θ es normalizado para tomar valores entre 0 y 1.

$$\theta_{cell} = \max \left[\cos^{-1} \left(\frac{d \cdot \hat{n}}{|d| |\hat{n}|} \right), \cos^{-1} \left(\frac{c \cdot \hat{n}}{|c| |\hat{n}|} \right) \right]$$

La ortogonalidad es importante ya que si consideramos la discretización en volúmenes finitos del término de difusión.

$$\frac{\delta U}{\delta t} + \nabla \cdot (UU) = \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot (v \nabla U) + g$$

Al ser integrado por el volumen de la celda

$$\int_V [\nabla \cdot (v \nabla U)] dV$$

Utilizando el teorema de divergencia

$$\int_V [\nabla \cdot (v \nabla U)] dV = \int_S [v(\nabla U) \cdot \hat{n}] dS = \sum_{f=1}^N [v_f(\nabla U)_f \cdot \hat{n}_f] S_f$$

La dificultad surge al evaluar el producto punto del vector normal y el gradiente de velocidad en la cara de la celda.

$$v_f(\nabla U)_f \cdot \hat{n}_f$$

v_f es la velocidad en la cara compartida y es calculada mediante los métodos de interpolación antes descritos (e.g. diferencia central). Si $\hat{n}$ es paralelo con d el producto punto se simplifica.

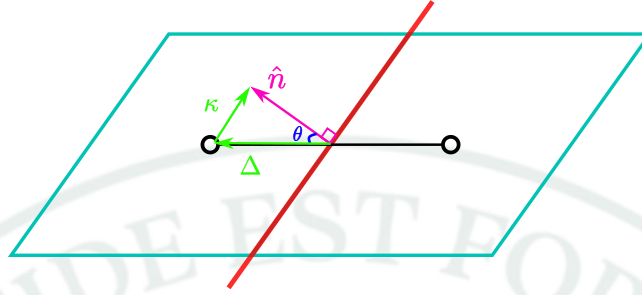
$$(\nabla U)_f \cdot \hat{n}_f = \frac{(U_P - U_N)}{|d|} |\Delta|$$

Jasak (1996) demostró que el truco es dividir el vector normal unitario en una componente ortogonal y otra no ortogonal como se muestra en la Figura 32.

$$\hat{n} = \Delta + k$$

Figura 32

Descomposición en componente ortogonal y no ortogonal



Nota: Elaboración propia

Al sustituir en la discretización se obtiene

$$\sum_{f=1}^N [v_f(\nabla U)_f \cdot \hat{n}_f] S_f$$
$$\sum_{f=1}^N [v_f(\nabla U)_f \cdot (\Delta + k)] S_f$$

De tal manera la componente ortogonal puede ser evaluada implícitamente, mientras que la componente no ortogonal es evaluada no implícitamente.

$$\underbrace{\sum_{f=1}^N [v_f(\nabla U)_f \cdot (\Delta_f)] S_f}_{\text{Implicito}} + \underbrace{\sum_{f=1}^N [v_f(\nabla U)_f \cdot (k_f)] S_f}_{\text{Explicito}}$$

El termino ortogonal puede ser evaluado de manera implícita como si fuese el caso de celdas ortogonales.

$$(\nabla U)_f \cdot \Delta_f = \frac{(U_P - U_N)}{|d|} |\Delta_f|$$

Por otro lado, el termino no ortogonal hace que la solución sea más inestable y probable de divergir ya que es evaluado como un término fuente es decir fuera del sistema lineal principal a partir del valor ya conocido de la velocidad.

$$(\nabla U)_f \cdot k_f$$

Por esto, entre más alta sea la no ortogonalidad de la malla, el termino explicito será más grande que el termino implícito.

OpenFoam permite un enfoque de corrección limitada. Es decir que agrega el valor del término no ortogonal, pero lo limita a una fracción del término implícito γ el cual normalmente es 1. Sin embargo, para malas mallas se puede definir $\gamma < 1$ para mejorar la estabilidad, sacrificando la exactitud.

$$(\nabla U)_f \cdot k_f < \gamma * \left(\frac{(U_P - U_N)}{|d|} |\Delta_f| \right)$$

Adicionalmente, ya que el termino no ortogonal utiliza el campo de velocidad existente es necesario realizar iteraciones adicionales. Por ejemplo, para una buena malla, el loop exterior del algoritmo SIMPLE es suficiente para converger una solución. Sin embargo, para una malla de mala calidad, son necesarios loops internos adicionales de la ecuación de la presión. Estos últimos son conocidos como loops de correctores no-ortogonales. Por ejemplo:

Para una buena malla la secuencia sería:

- Ecuación de momento
- Ecuación de presión
- Ecuación de energía, ecuación de turbulencia, etc.

Para una mala malla se resuelve:

- Ecuación de momento
- Ecuación de presión
 - Ecuación de presión (corrector no ortogonal)
 - Ecuación de presión (corrector no ortogonal)
 - Ecuación de presión (corrector no ortogonal)
- Ecuación de energía, ecuación de turbulencia, etc.

2.4.2 Distancia a Muro Adimensional (y^+)

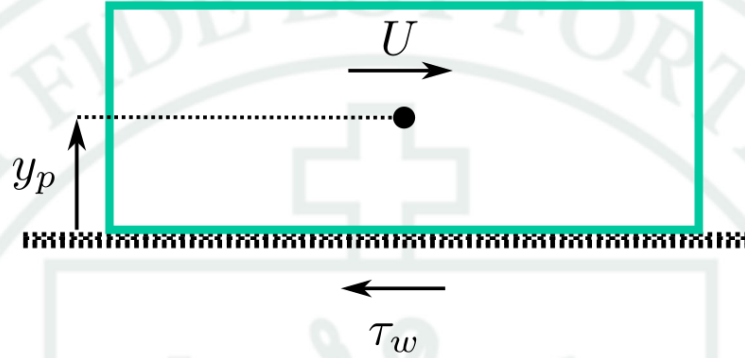
Como se menciona en la sección “Funciones de pared”, para asegurar que los esfuerzos cortantes cerca al muro sean calculados correctamente, se debe procurar valores de $y^+ < 5$ y $30 < y^+ < 300$ (Launder & Spalding, 1974). Este valor de y^+ es la distancia adimensional del centroide al muro más cercano como se muestra en la Figura 33 , definido por la ecuación:

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y_P}{\mu}$$

Donde $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\omega}{\rho}}$ es la velocidad de fricción definida por la raíz de los esfuerzos cortantes de la pared, esta es una velocidad ficticia que sirve para escalar y medir la intensidad de los esfuerzos cortantes de la pared.

Figura 33

Definición de y^+



Nota: Elaboración propia

A partir del valor de y^+ este valor podemos definir qué tan fina debe ser una malla apropiada. Primero, considerando que τ_ω no es conocido, se estima su valor suponiendo la capa límite de una placa plana. Para esto se calcula el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

Donde L es la longitud de la placa, sin embargo, para el presente estudio por tratarse de canales se utiliza el diámetro hidráulico $D_h = 4A/P_m$.

A partir del número de Reynolds y mediante correlaciones empíricas se determina el coeficiente de fricción en la pared c_f .

$$c_f = [2 \log_{10} Re - 6.5]^{-2.3}$$

Existen muchas otras fórmulas para la estimación de este coeficiente. Además, es importante asegurar que la capa límite sea totalmente turbulenta. Una vez conocido el coeficiente se calculan los esfuerzos cortantes de pared según:

$$\tau_\omega = \frac{1}{2} \rho U^2 c_f$$

Seguidamente la velocidad de fricción es $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\omega}{\rho}}$.

Finalmente, reorganizando la ecuación de y^+ para el cálculo de la distancia al centro de la primera celda y_p , y finalmente el tamaño de celda y_H

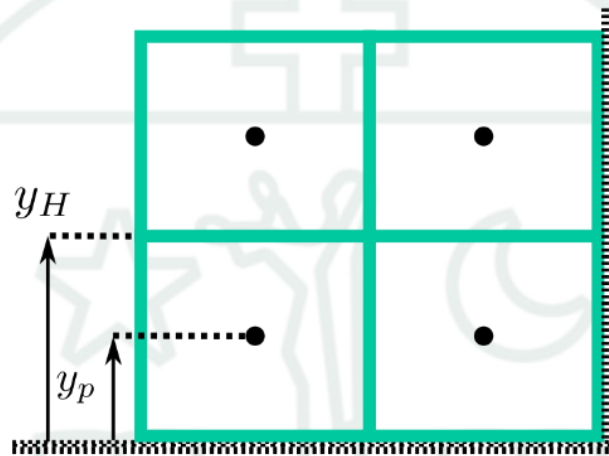
$$y^+ = \frac{y_p \rho u_\tau}{\mu}$$

$$y_p = \frac{y^+ \mu}{\rho u_\tau}$$

$$y_H = 2 y_p$$

Figura 34

Determinación del tamaño de la malla.



Nota: Elaboración propia

Esto es una estimación inicial de cuan pequeña tiene que ser la malla computacional, y a partir de ella se ejecuta una simulación y se extrae los valores de y^+ , si los valores son muy grandes se refina la malla hasta obtener los valores de y^+ .

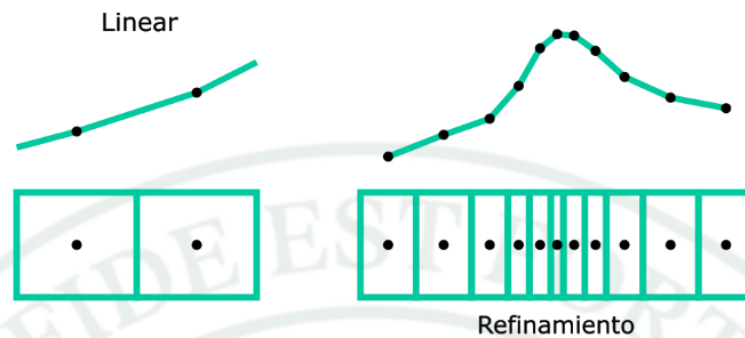
Finalmente, es importante entender que los valores de y^+ varían a lo largo de las paredes, por lo que se debe priorizar las zonas de interés, teniendo en cuenta además que la resolución longitudinal estará limitada por la relación aspecto y el número de las celdas.

2.4.3 Capas de refinamiento

En el mejor de los casos un flujo varío de manera linear entre dos celdas, sin embargo, en aquellos lugares donde la gradiente es muy grande son necesarias celdas más pequeñas para poder resolver este gradiente (Li & Lal, 2023). La Figura 35 muestra la diferencia para el uso de capas de refinamiento.

Figura 35

Diferencia entre gradientes de velocidad

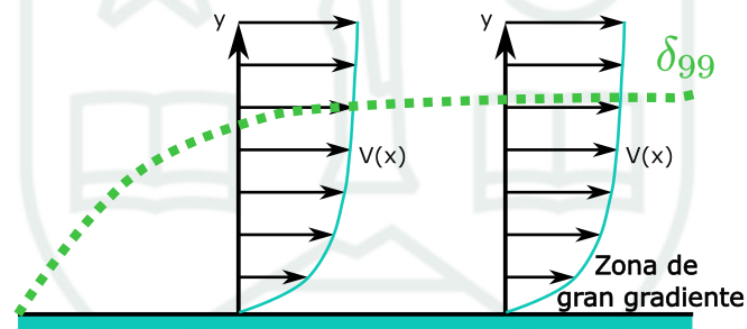


Nota: Elaboración propia

Como se ha mencionado la gradiente normal al muro es grande cerca a este. En la Figura 36 se puede definir que la gradiente a lo largo de muro $\delta U/\delta x$ es mucho menor que la perpendicular al flujo $\delta U/\delta y$.

Figura 36

Diferencia entre gradiente longitudinal y perpendicular al flujo

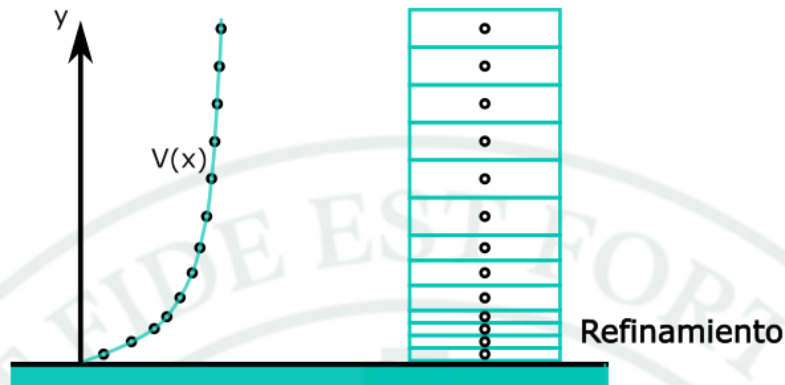


Nota: Elaboración propia

Para resolver estos gradientes las celdas necesitan ser delgadas en las zonas de gradientes alto como se muestra en la Figura 37 (esto solo para métodos RANS, ya que los métodos LES también necesitan mejor resolución longitudinal).

Figura 37

Refinamiento en zona de gran gradiente

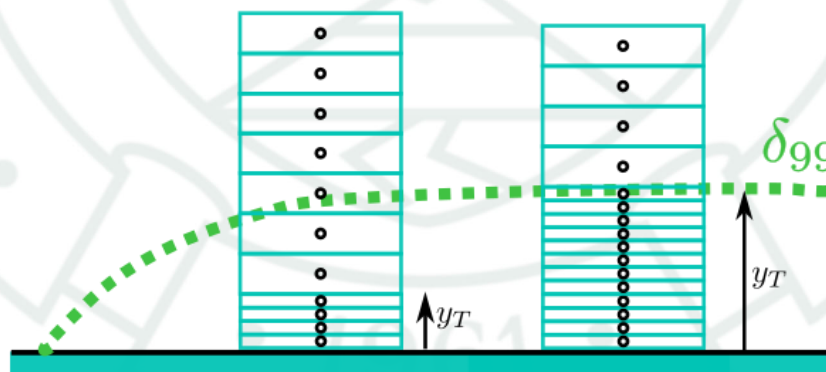


Nota: Elaboración propia

Estas celdas pueden ser generadas con los diferentes programas de mallado, sin embargo, es necesario especificar: el tamaño de la primera celda y_h , el número de capas N y la ratio geométrica de crecimiento G . Para su definición, es importante definir primero el espesor de la capa limite, para esto se introduce δ_{99} el cuál es la posición normal al muro donde la velocidad alcanza el 99% de la velocidad libre. Para esto es importante que la altura total de capas agregadas sea suficiente para poder cubrir la capa la capa limite como se muestra en la Figura 38.

Figura 38

Altura total de refinamiento con respecto al ancho de la capa limite



Nota: Elaboración propia

La altura a la primera capa y_H se describió en la sección “Distancia a Muro Adimensional” y se elige de modo que permita obtener valores de y^+ adecuados.

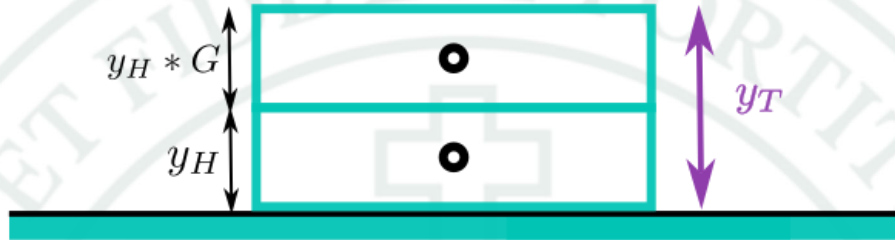
$$y^+ = \frac{y_P \rho u_\tau}{\mu}$$

Empezando por la altura de la primera celda, si el valor de $G > 1$ entonces cada capa que sigue a la primera será más grande como se muestra en la Figura 39 y como se define en la ecuación

$$y_T = y_H + y_H * G$$

Figura 39

Ratio de expansión G en dos celdas



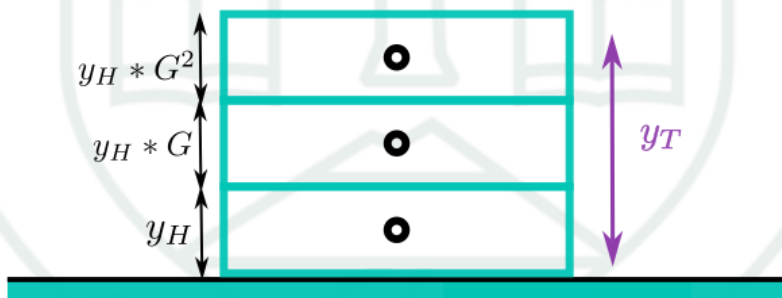
Nota: Elaboración propia

Para el caso de tres capas como se muestra en la Figura 40, la ecuación se expande a:

$$y_T = y_H + y_H * G + y_H * G^2$$

Figura 40

Ratio de expansión G en 3 celdas



Nota: Elaboración propia

Para una cantidad N de capas se tendría:

$$y_T = y_H + y_H * G + y_H * G^2 + y_H * G^3 + \dots + y_H * G^{N-1}$$

A partir de esta ecuación se puede definir la sumatoria que determina la altura total

$$y_T = \sum_{k=0}^{N-1} y_H G^k$$

Simplificando utilizando una serie geométrica

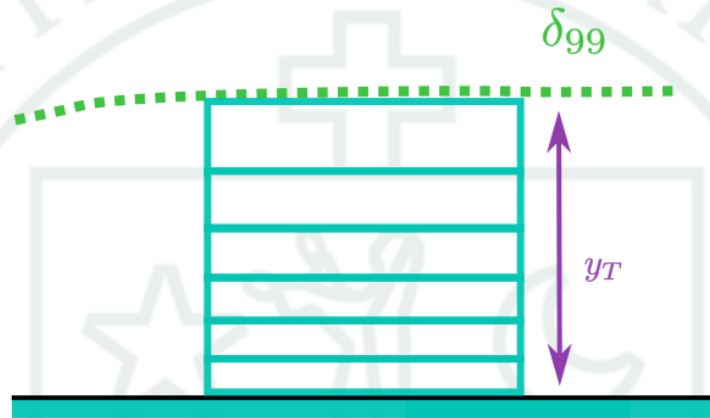
$$y_T = \sum_{k=0}^{N-1} y_H G^k = y_H \frac{1 - G^N}{1 - G}$$

Finalmente, la altura total depende del ratio de crecimiento G y del número de capa N . Es así que, si deseamos que la capa limite este dentro de esta altura total, definimos mínimamente que la altura de refinamiento es igual al ancho de la capa limite como se define en la Figura 41 y en la ecuación siguiente.

$$\delta_{99} = y_T = y_H \frac{1 - G^N}{1 - G}$$

Figura 41

Altura de refinamiento con respecto al ancho de la capa limite



Nota: Elaboración propia

Ahora el problema está en determinar el ancho de la capa limite, esto se puede realizar a partir de correlaciones empíricas, como la definida por (Çengel & Cimbala, 2006).

$$\delta_{99} = \frac{4.91L}{\sqrt{Re_L}} \quad Re < 5 \times 10^5$$

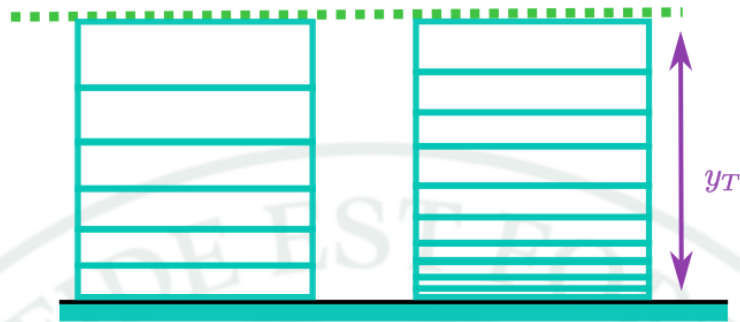
$$\delta_{99} = \frac{0.38L}{Re_L^{1/5}} \quad Re > 5 \times 10^5$$

Se debe buscar correlaciones adecuadas para el tipo de experimento que se esté tratando de reproducir. Por otro lado, se puede usar criterios basados en criterios ingenieriles para determinar el alto total de las capas de refinamiento, considerando factores como el medio que contiene el flujo o el tirante del flujo.

Una vez definida la altura total y la altura de la primera celda, no encontramos con dos variables independiente G y N a partir de las cuales se puede alcanzar una misma altura para diferentes valores de estas variables como se muestra en la Figura 42.

Figura 42

Efecto de la variación de las variables G y N



Nota: Elaboración propia

En términos de calidad de mallado se busca que el ratio de crecimiento sea lo menor posible. Por lo tanto, se puede seguir las siguientes ecuaciones para una estimación inicial.

$$y^+ \sim 30 \rightarrow N > 10$$

$$y^+ \sim 1 \rightarrow N > 25$$

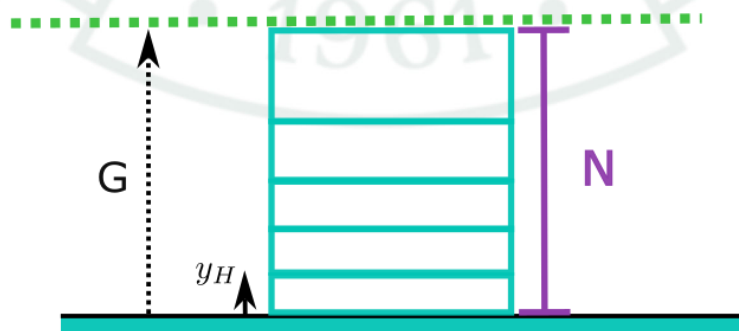
Obtenido N podemos calcular el valor de G a partir de algoritmos iterativos como el método de Newton-Raphson y el método de bisección. La solución obtenida será el valor máximo de G .

$$y_H \frac{1 - G^N}{1 - G} - \delta_{99} = 0$$
$$f(G) = 0$$

Esta definición de los valores de y_H , G y N es una estimación inicial de nuestra malla como se muestra en la Figura 43. Por lo tanto, necesita ser verificada. En primer lugar, el valor de y_H según los valores de y^+ sin son más grandes de lo deseados se reduce y_H hasta alcanzar el valor de y^+ .

Figura 43

Valores determinados de G , N y y_H

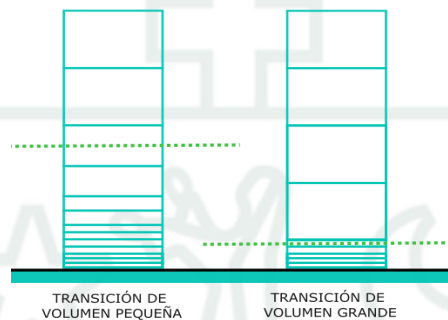


Nota: Elaboración propia

Otro parámetro para revisar es la transición de volumen de la última celda con respecto a las celdas del flujo libre, estos volúmenes tienen que ser similares. La revisión de esta transición puede ser visual como se aprecia en Figura 44 . Es así que, si esta transición de volumen es muy grande se puede incrementar el valor de N , o alternatively incrementar G , sin embargo, esto último puede afectar la exactitud de los resultados de la simulación. Por lo general, se debe procurar valores de G que cumplan la siguiente relación.

$$1.05 < G < 1.3$$

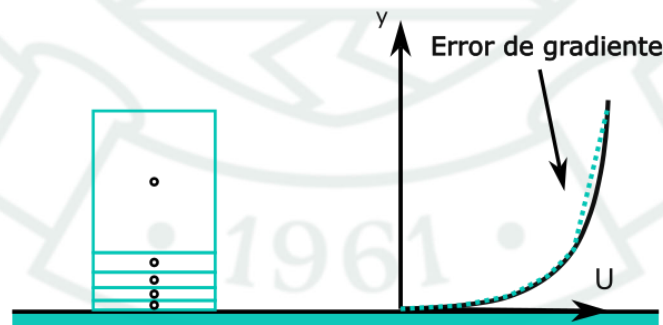
Figura 44
Tipos de transición volumétrica



Nota: Elaboración propia

Es importante cuidar la transición de volumen cuando se utiliza métodos RANS, ya que un cambio abrupto puede causar errores en el gradiente local del perfil de velocidad como se muestra en **Figura 45**, afectando la exactitud del esfuerzo cortante de pared.

Figura 45
Error de gradiente por transición de volumen abrupta



Nota: Elaboración propia

Finalmente, para los métodos RANS es necesario ejecutar estos estudios usando un mínimo de 3 diferentes mallas (gruesa, media y fina), teniendo especial estudio no solo en los valores de y^+ , sino que también en G y N al ser variables que pueden afectar la exactitud de la solución.

CAPITULO III: HIDRAULICA DE PRESAS Y VERTEDEROS

1. Introducción

Las presas son estructuras muy importantes para el manejo de recursos hídricos, ya que garantizan el almacenamiento, la regulación y el control de los caudales de una cuenca (Boulangue et al., 2021). Esto quiere decir que satisfacen necesidades de riego, abastecimiento y hasta generación de energía, además de ser un elemento de seguridad ante avenidas extraordinarias si es que son diseñadas correctamente.

Una presa es construida para generar un reservorio donde se pueda almacenar agua que podrá ser usada según la población lo requiera. Sin embargo, cuando este reservorio llega a su máxima capacidad y existe un flujo excedente es necesario una estructura que disponga este caudal aguas debajo de la presa, de lo contrario un nivel de agua más alto que el absoluto máximo permisible podría dañar el cuerpo de la presa o incluso rebalsarla (Schleiss et al., 2023). Por esto, es de absoluta importancia la construcción de estructuras de excedencias que permitan redirigir las avenidas extraordinarias hacia el río aguas abajo sin poner el riesgo la seguridad de la presa. Estas estructuras son conocidas como vertederos o aliviaderos y su correcto diseño es fundamental para garantizar la seguridad de la presa.

Por lo tanto, en este capítulo se describe aspectos teóricos fundamentales sobre la hidráulica de presas y vertederos. Primero, se aborda brevemente los conceptos fundamentales de las presas. Seguidamente, se detallan los fundamentos de los vertederos. Finalmente, se aborda con mayor nivel de detalle la hidráulica de los vertederos escalonados al ser estos el eje central de la investigación.

2. Presas

Las presas son estructuras construidas para almacenar grandes cantidades de agua en un reservorio controlado. Atienden diversas solicitudes que se suelen presentar en una cuenca como pueden ser: el control de inundaciones, irrigación, generación de energía, suministro de agua, conservación de flora y fauna e incluso recreativas (British Dam Society, 2020). Es común que una presa atienda más de una de esas necesidades a la vez. Además, esta capacidad de almacenar agua reduce las máximas avenidas que se puedan presentar en un cauce, controlando así posibles inundaciones. Opuestamente, puede colaborar los caudales mínimos incrementándolos para satisfacer las necesidades de generación de energía o irrigación aguas abajo.

2.1. Clasificación de presas

A partir de lo establecido en el Reglamento de seguridad de presas públicas de embalse de agua del Autoridad Nacional del Agua (2019)

2.1.1 Según sus dimensiones

Las presas pueden clasificarse como:

Grandes presas, tienen una altura superior a 15 metros desde el fondo de la cimentación hasta su corona, o si es que tienen una altura entre 10 y 15 metros desde el fondo de la cimentación, y además presenten una capacidad de embalse superior a los 3 millones de metros cúbicos o una longitud de corona superior a 400 metros.

Pequeñas presas, tienen una altura de 5 a 10 metros desde el fondo de la cimentación hasta su corona y un embalse de medio millón de metros cúbicos, o si tiene una altura de 2 a 5 metros desde el fondo de la cimentación hasta la corona.

2.1.2 Según el riesgo

Las presas pueden ser clasificadas en:

Categoría A, cuando la falla de la presa representa un peligro muy grave para núcleos urbanos o estructuras de servicios esenciales, esto cuantificado según pérdida de vidas humanas o una alta afectación ambiental, así como daños materiales catastróficos.

Categoría B, cuando la falla de la presa pueda generar daños ambientales y materiales importantes no llegando a ser catastróficos, afectando a una cantidad no muy cuantiosa de bienes materiales.

Categoría C, cuando la falla de la presa pueda generar daños moderados y no produzca de ninguna manera la pérdida de vidas humanas.

2.2. Niveles de operación

A lo largo de su operación una presa puede presentar distintos niveles de agua, la Figura 46 muestra: nivel de corona de presa, nivel de aguas máximas extraordinarias, nivel de aguas máximas ordinarias, nivel de aguas mínimas y nivel de fondo de laguna. Estos niveles se determinan a partir de la curva capacidad-elevación y se seleccionan según la capacidad de almacenamiento que se requiera (US Army Corps of Engineers, 2018). Así, la Figura 47 muestra el volumen de agua que una presa contiene con respecto al nivel de agua en el reservorio, esto a partir de la topografía del reservorio.

Finalmente, el volumen útil del reservorio y el volumen muerto del reservorio forman el volumen total del reservorio, el cual esta acotado por el nivel de aguas máximas ordinarias (NAMO). La definición de estos niveles es fundamental para el diseño de las estructuras de demasías.

Figura 46

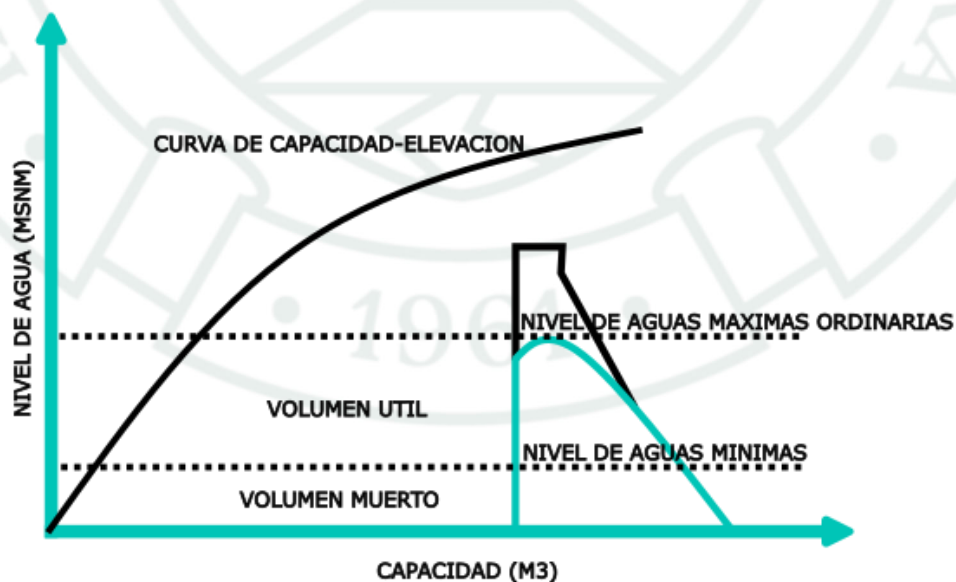
Niveles importantes de una presa



Nota: Elaboración propia

Figura 47

Curva capacidad-elevación



Nota: Elaboración propia

3. Vertederos

Esta estructura representa la principal protección de una presa ante máximas avenidas, al ser su principal función descargar el exceso de caudal en tiempos de avenida, garantizando la seguridad y operatividad de la presa (Magel Pereira, 2020). Sin importar que tan grande se pueda construir una presa, no es económicamente razonable construirla tan alta como para poder almacenar estos grandes caudales que ocurren con una frecuencia muy baja. Es por esta razón que las estructuras de demasías son necesarias.

3.1. Diseño del vertedero

El diseño del vertedero de una presa empieza con la definición del caudal de diseño. Para algunos casos el máximo caudal es controlado y por lo tanto puede ser determinado con exactitud. Sin embargo, para la mayoría de las presas que almacenan agua en cuencas el caudal es mucho menos determinado. Para empezar, el caudal máximo probable debe ser calculado a partir de información hidrométrica histórica, lo que incluye un gran porcentaje de error. Además, el caudal de diseño podría ser considerado menor al caudal máximo probable. Y, por último, los factores de seguridad aplicados podrían variar según qué parte de la estructura estemos considerando. Al final, se considera tanto la fiabilidad de la información hidrométrica como la clasificación de la presa según sus dimensiones y el riesgo.

Por ejemplo, para el caso de una presa clasificada como grande, el fallo del vertedero sería catastrófico, por lo tanto, este se diseñaría con el máximo caudal probable. Sin embargo, la estructura de disipación aguas abajo podría ser diseñada para un caudal menor, ya que el fallo de la misma no acarrearía consecuencias catastróficas al no afectar la estructura de la presa, estos criterios representan la filosofía de diseño del proyecto.

Otra alternativa, es conjugar el vertedero principal con un vertedero de tierra de emergencia lo que es mucho más económico y permite evacuar el caudal máximo probable, reduciendo el diseño del vertedero principal al caudal de 0.1% de frecuencia.

Finalmente, en presas aún más pequeñas, se podría diseñar utilizando el caudal de 2% de frecuencia, considerando por ejemplo unas presas de materiales sueltos de baja altura, donde remplazar todo el cuerpo de la presa sería más económico que la construcción de un vertedero que la proteja.

3.1.1 Consideraciones iniciales

El diseño se rige por lo establecido por los lineamientos y criterios de diseño establecidos por la Bureau of Reclamation (2022), además, el diseño debe ser apoyado por modelos hidráulicos. Estos modelos deben ser tridimensionales y bidimensionales para poder evaluar la eficiencia de la estructura con respecto a su disposición en el espacio. La ejecución de estos modelos a escala permite ajustar en el diseño final de la estructura permitiendo economizar en el volumen de concreto armado del proyecto. Además, los modelos computacionales son otra herramienta útil para este mismo fin, yendo de la mano con los modelos físicos y los criterios de diseño empírico.

Por otro lado, es esencial que el flujo de entrada sea derivado de la manera menos turbulenta posible (Ramarao et al., 2023), evitando que las líneas de flujo sufran inestabilidad, separación o alguna otra perturbación, ya que esto podría reducir la capacidad de descarga del aliviadero o general cavitación.

3.2. Tipos de Vertederos

El tipo de vertedor dependerá fundamentalmente del tipo de presa, el caudal de diseño, las condiciones topográficas y la fundación de la presa (Pavlov, 2022). Por ejemplo, ciertas presas son diseñadas para que el mismo cuerpo de la presa funcione como un vertedero al ser rebasadas, esto en presas de concreto de arco o de contrafuerte. Sin embargo, la mayoría de los casos dada su topografía requieren una estructura adicional, especialmente cuando las longitudes de cresta de presa son muy pequeñas o cuando se trata de presas de materiales suelos o de enrocados. Para estos casos es común encontrar vertederos de canal. Finalmente, para el caso de presas pequeñas suele bastar con vertederos de tipo caja al ser más económicos y adecuados para pequeños caudales.

Independientemente del tipo de vertedero, se puede distinguir en todos tres zonas fundamentales para su óptimo funcionamiento; la sección de la cresta, la sección de conducción y la sección de descarga. La cresta es el punto de entrada del vertedero y se encuentra a la altura del Nivel Máximo de Agua Ordinarias. A partir de este punto el flujo debe ser llevado hasta el nivel natural del río aguas abajo de la presa. Terminado en una sección de descarga que puede ser también diseñada para disipar el exceso de energía cinética si es necesario.

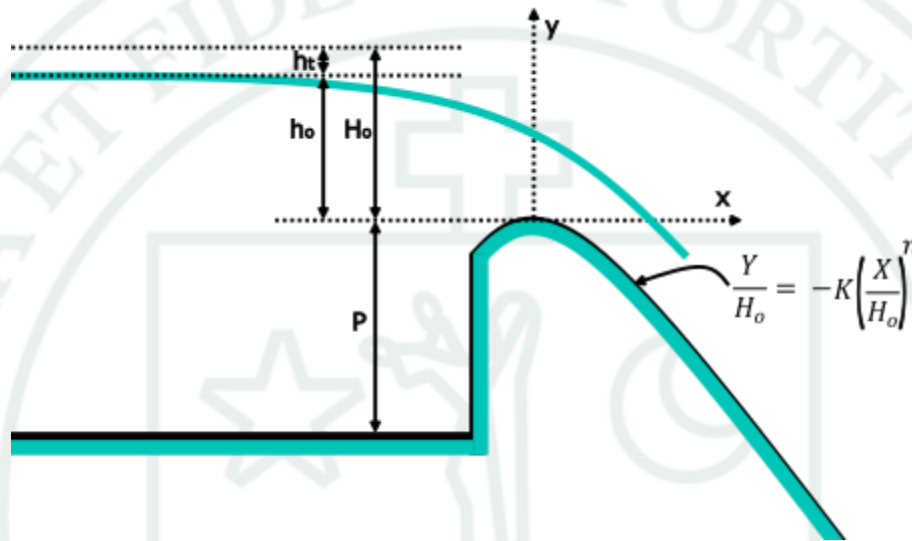
Bajo estas consideraciones y según el Bureau of Reclamation (2022) se pueden clasificar un vertedero según el control que ofrecen, libres o controlados. Además, según el canal de descarga se clasificación en:

3.2.1 Vertedero Cimacio

Para que un vertedero cimacio pueda descargar de forma segura el caudal de diseño tenemos que definir la longitud de cresta (L) y la altura de diseño (H_o). La Figura 48 muestra las diferentes componentes del diseño hidráulico.

Figura 48

Vertedero cimacio



Nota: Adaptado de Chow (1959)

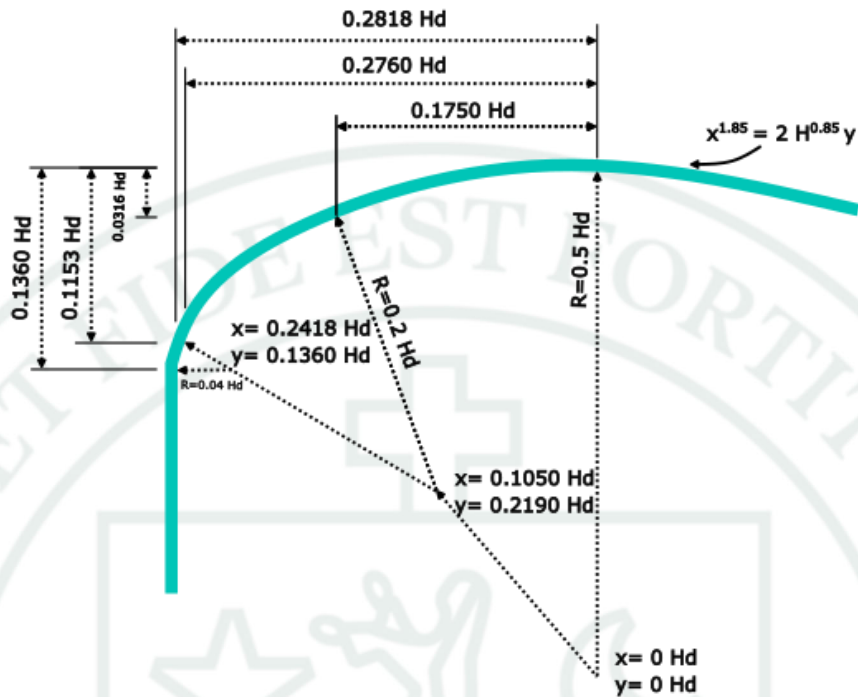
La fórmula establece que el perfil de la cresta dependerá de la altura de diseño H_o , la inclinación de la cara aguas arriba del cimacio α y la altura de la cresta P . Ya que estos factores modifican la velocidad de entrada $V_t = Q/L(P + h_o)$ y por consiguiente el coeficiente de C_o . Así, se define que la cara aguas abajo sigue la ecuación siguiente.

$$\frac{Y}{H_o} = -K \left(\frac{X}{H_o} \right)^n$$

Donde K y n depende de la inclinación de la cara aguas arriba y de la velocidad de entrada, y pueden ser extraídos de tablas que los representan en función de h_t/H_o . Por lo tanto, para una pared vertical se ha estandarizado la geometría del perfil según se muestra en la Figura 49.

Figura 49

Geometría de la cresta del perfil cimacio



Nota: Adaptado de Chow (1959)

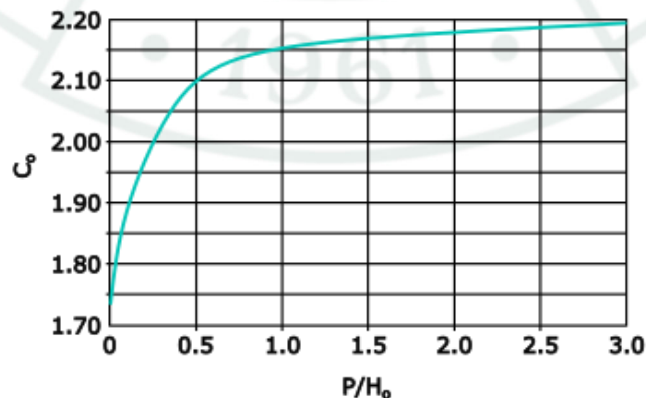
Una vez definida la geometría, la capacidad de descarga para un vertedero no controlado queda definida por la ecuación:

$$Q = C_o L H_o^{3/2}$$

Donde Q es el caudal total m^3/s , C_o es el coeficiente de descarga, L es la longitud efectiva de cresta y H_o es la carga hidráulica. Como se mencionó, el coeficiente de descarga del vertedero está definido por la relación entre P y H_o las cuales son particulares para cada proyecto, y se puede extraer de la Figura 50.

Figura 50

Coeficiente de descarga



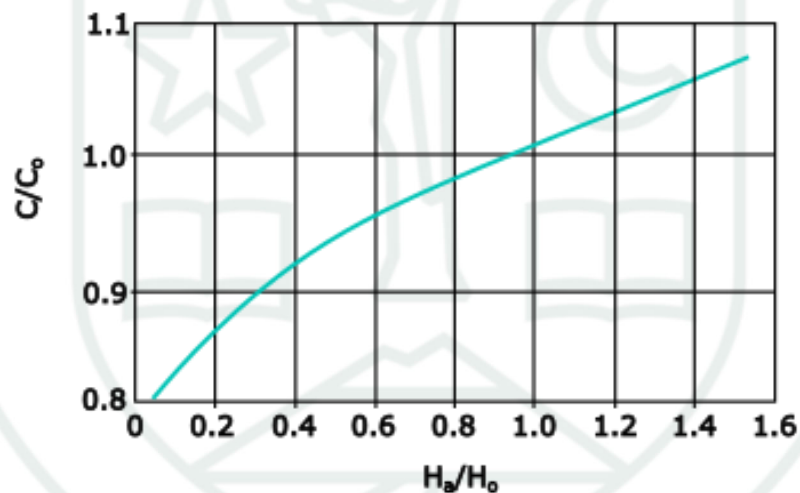
Nota: Adaptado de Bureau of Reclamation (1987)

A partir de la ecuación de descarga de un aliviadero se puede decir que entre más grande sea el coeficiente de descarga, la longitud de cresta podrá ser menor lo que se traduce en menores volúmenes de concreto, por lo tanto, se debe hacer todo lo posible para asegurar el coeficiente de descarga más óptimo.

Finalmente, la altura de diseño H_o es usada para el diseño del perfil aguas abajo del vertedero, mientras que la altura hidráulica H_d dependerá de las condiciones de operación, pudiendo ser igual, mayor o menor de la altura de diseño H_o . Por ejemplo, cuando $H_d > H_o$ el coeficiente de descarga aumenta y se desarrollan presiones negativas en la cara del vertedero, por lo que el coeficiente de descarga debe ser corregido cuando se usen alturas diferentes a la altura de diseño, según la Figura 51.

Figura 51

Corrección de coeficiente de descarga para alturas diferentes a la de diseño



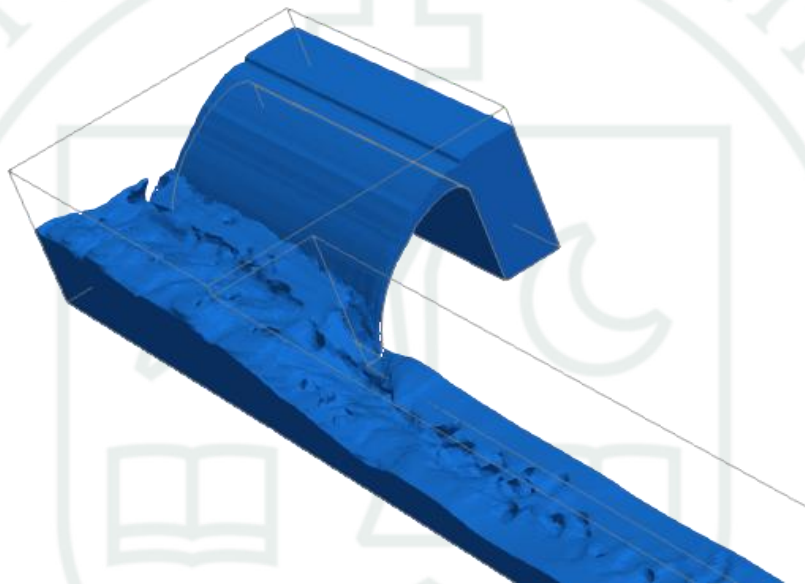
Nota: Adaptado de Bureau of Reclamation (1987)

Para la velocidad de acercamiento, se debe buscar, cuando las condiciones del proyecto lo permitan, que el vertedero este orientado perpendicular al flujo principal del río, siendo esto muy poco recurrente. Esto con el fin de garantizar que la lámina vertiente inferior sea lo más estable posible sin perturbaciones ni separación.

3.2.2 Vertedero lateral

Este tipo de vertederos son necesarios cuando el vertedero no puede ser incorporado sobre el eje principal de la presa, por lo que se vale de la topografía lateral para su despliegue. La Figura 52 muestra la forma que suele tener, la cual consiste de un canal de aproximación con una cresta lateral, el canal lateral, el canal de descarga (rápida) y una estructura de final de disipación de energía.

Figura 52
Geometría de un vertedero lateral



Nota: Elaboración propia

El diseño del canal lateral se basa en las leyes de la conservación del momento lineal según lo desarrollado por Hinds (1926). En estos vertederos se asume que la energía es disipada luego de caer por la cresta al canal lateral mediante el mezclado del flujo, resultando en una única fuerza proveniente de la caída libre del fluido a lo largo del eje del canal. Además, se asume que la fricción del canal puede ser omitida al no afectar la precisión de los cálculos, lo que ha sido probado en modelos hidráulicos y modelos experimentales físicos.

La cresta es libre y sigue el mismo criterio que un vertedero cimacio, es diseñado iterativamente para garantizar que opere en los rangos adecuados sin inundarse, y que produzca un flujo supercrítico que permita disipar toda la energía antes de empezar el flujo a través de la rápida. La sección transversal se diseña de tal manera que produzca una reducción uniforme a lo largo de ella. Este perfil de agua puede ser estimado según:

$$\Delta Y = \frac{Q_2(V_1 + V_2)}{g(Q_1 + Q_2)} \left[(V_2 - V_1) + \frac{V_1(Q_2 - Q_1)}{Q_2} \right]$$

En esta ecuación ΔY es el cambio del nivel de agua entre dos secciones separadas por ΔX , Q_1 y V_1 son el caudal y la velocidad en la sección aguas arriba, mientras que Q_2 y V_2 son el caudal y la velocidad en la sección aguas abajo.

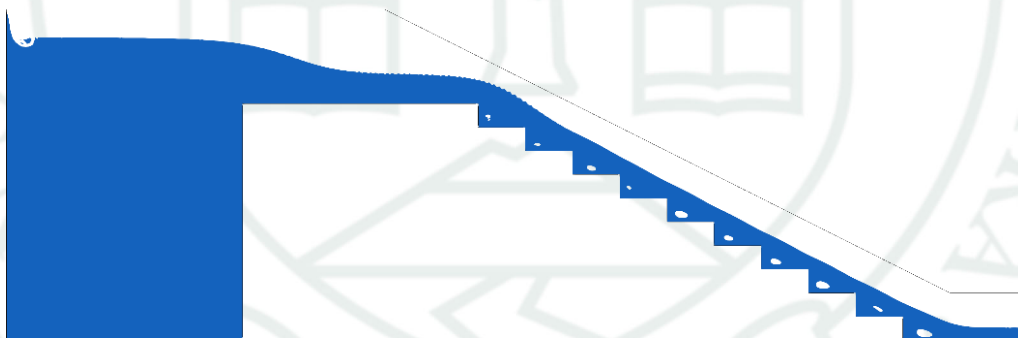
Los cálculos se inician suponiendo un nivel de agua conocido en la parte inferior, de modo que sea igual al flujo crítico y_c y se continúan aguas arriba mediante incrementos iterativos, calculando el perfil del agua a lo largo del canal lateral. Si lo estimado superar la capacidad del canal lateral, se rediseña la geometría de la rápida o de la cresta, la pendiente de la rápida debe asegurar un flujo supercrítico.

3.2.3 Vertedero escalonado

Desde la introducción del uso de concreto compactado por rodillo para la construcción de presas es normal encontrar presas de gravedad con vertedero con escalones hacia el lado aguas debajo de la presa. Estos escalones actúan como disipadores de la energía, aliviando la energía recibida por la estructura de disipación final, reduciendo significativamente el costo del proyecto, la Figura 53 muestra la estructura típica de un vertedero escalonado.

Figura 53

Geometría típica de un vertedero escalonado



Nota: Elaboración propia

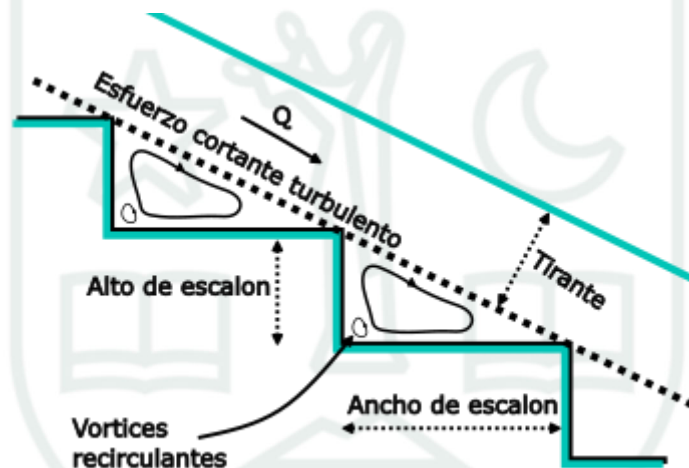
3.2.3.1. Regímenes de Flujo

Un vertedero escalonado puede presentar dos bien definidos tipos de flujos; flujo rasante o flujo saltante. El tipo de flujo estará definido por el caudal de entrada y por qué tan desarrollado esté el flujo.

a. Flujo Rasante, este flujo se origina cuando entre los bordes externos de los escalones se forma un pseudo-fondo sobre el cual se desliza el agua mientras que en los bolsones interiores recircula el flujo atrapado (Rajaratnam, 1990) como se muestra en la **Figura 54**. La disipación de la energía ocurre mediante la transferencia de momento o el esfuerzo cortante entre el flujo rasante y el flujo recirculante (Chanson, 1994b; Wan et al., 2017). En la **Figura 55**, se aprecia que los escalones se encuentran completamente sumergidos, generando primero una zona no aireada dentro de la cual se genera una capa turbulenta. Además, la unión de esta capa turbulenta con la superficie libre se denomina el punto de inyección a partir del cual la zona aireada se comienza a desarrollar hasta que se convierte en un flujo uniforme totalmente aireado con tirante, velocidad y concentración de aire constante.

Figura 54

Flujo rasante en vertederos escalonados



Nota: Modificado de Chanson (1994b)

Figura 55

Regiones del flujo rasante

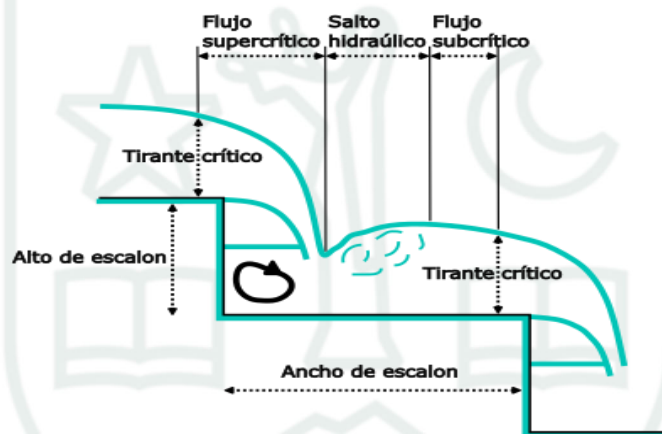


Nota: Modificado de Chanson (1994b)

b. Flujo Saltante, este flujo está caracterizado por caídas entre los escalones con la formación de un resalto en cada uno de ellos (Chamani & Rajaratnam, 1994; Chanson, 1994a). La disipación de energía se da por la caída del chorro en el siguiente escalón y la consecuente separación y mezcla del flujo así como por la formación del resalto hidráulico total o parcialmente desarrollado (Rajaratnam, 1990). La Figura 56 muestra un flujo saltante aislado donde se alcanza a formar el resalto hidráulico pasando el flujo por su tirante crítico al caer y regresa a su estado subcrítico luego del resalto. Los flujos que no alcanzan a desarrollar el resalto se les denomina flujo rasante parcial, no impactando totalmente en la huella del siguiente paso, o cuando esta huella no es lo suficientemente larga (Lejeune et al., 1994; Stephenson, 1991).

Figura 56

Flujo saltante en un vertedero escalonado



Nota: Modificado de Chanson (1994)

3.2.3.2. Factor de fricción

Mientras que para el diseño de canales abiertos se utilizan métodos que determinan la pérdida de energía a partir de parámetros de fricción definidos por el coeficiente de Manning n o el factor de fricción de Darcy f (Chow, 1959), el diseño de vertederos escalonados se complica por la naturaleza mucho más turbulenta del flujo; debido a la existencia de entrampamiento de aire y la consecuente variación de la densidad aire-agua a lo largo del vertedero (Chanson, 2002).

Por lo tanto, el diseño clásico parte de la determinación de un factor de fricción de Darcy f en función a la relación adimensional Nh/y_c (donde N es el número de escalones, h es el alto del escalón y y_c es el tirante crítico). Asumiendo condiciones de flujo rasante totalmente desarrollado $f = 0.25$ es una buena aproximación independiente de la altura del escalón.

3.2.3.3. Muros Laterales

Al asumir un flujo aireado es necesario tomar el coeficiente de esponjamiento ϵ en términos de Nh/y_c (Chanson y Toombes, 2002). Al igual que para el factor f este coeficiente se vuelve constante para valores altos de Nh/y_c . Por lo tanto, para ser conservativos se puede asumir $\epsilon = 1.75$ para la determinación de las paredes laterales.

Se define primero y_{90} , altura que corresponde al tirante donde la concentración de aire en el flujo es de 90% y se calcula a partir del tirante de agua clara y el factor de esponjamiento según:

$$y_{90} = d_w * \epsilon$$

Por encima de este tirante, es mínima la cantidad de agua que circula. Sin embargo, la mayoría de esta agua por su baja concentración se comporta como splash por lo que es necesario un freeboard adicional. Por lo tanto, se estima un freeboard de $1.5 * y_{90}$ para la contención de toda esta salpicadura. Sin embargo, si la importancia de la estructura lo permite un freeboard de $1 * y_{90}$ es suficiente para contener la mayoría del flujo, con un freeboard de $0.5 * y_{90}$ en las zonas mas cercanas a la cresta del vertedero.

3.2.3.4. Disipación de Energía

La disipación de la energía se define como la razón entre la energía perdida con respecto a la energía total entre dos puntos de un vertedero. Es así que, considerando un datum fijo de referencia la energía y las definiciones geométricas establecidas en las Figura 57 , se define la energía en la cresta del vertedero como:

$$E_o = H_o + y_o + \frac{U_o^2}{2g}$$

En términos del tirante crítico

$$y_c = \frac{U_o^2}{g}$$

Remplazando en la ecuación anterior

$$E_o = H_o + y_c + \frac{y_c}{2}$$

$$E_o = H_o + \frac{3y_c}{2}$$

Además, para cualquier punto de un vertedero escalonado:

$$E_t = d_w \cos \theta + \frac{U_{avg}^2}{2g}$$

Finalmente se define la pérdida de energía como

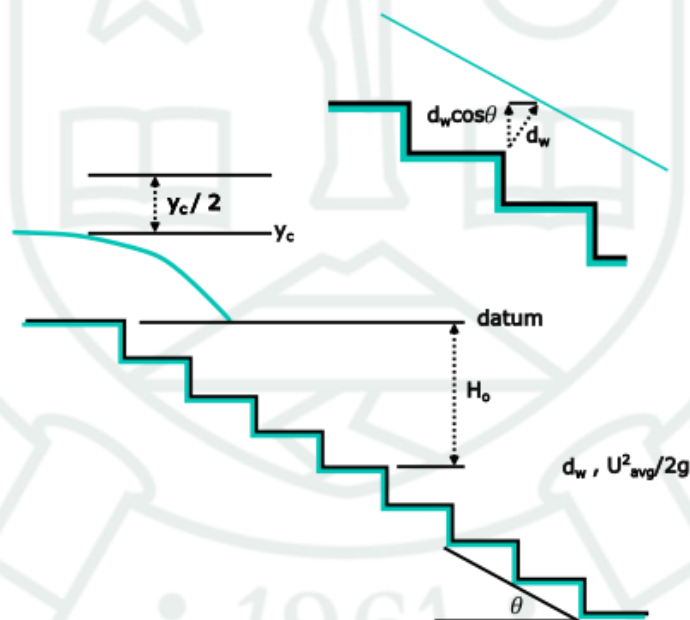
$$\frac{\Delta E}{E_o} = \frac{E_o - E_t}{E_o} = \frac{\left(H_o + \frac{3y_c}{2}\right) - \left(d_w \cos \theta + \frac{U_{avg}^2}{2g}\right)}{H_o + \frac{3y_c}{2}}$$

Simplificando

$$\frac{\Delta E}{E_o} = 1 - \frac{d_w \cos \theta + \frac{U_{avg}^2}{2g}}{H_o + \frac{3}{2}y_c}$$

Figura 57

Variables para el cálculo de disipación de energía



Nota: Elaboración propia

3.2.3.5. Procedimiento de Diseño

Considerando como f varía con respecto a la altura del vertedero, se puede determinar el tirante de agua clara y los perfiles de velocidad a través de todo el vertedero usando el método de paso estándar. Además, el tirante y_{90} puede ser determinado a partir de ϵ . A partir de y_{90} se determina la altura de los muros laterales según el factor de seguridad que se convenga. Finalmente, la disipación de energía se determina según H , d_w y U_{avg} . El procedimiento se define:

- Variables de diseño conocidas (Q , b , θ , H y h)
- Seleccionar el factor de fricción (f)
- Determinar d_w y U_{avg} a lo largo del vertedero con el método de paso estándar.
- Determinar y_{90} según el factor ϵ y diseñar muros laterales
- Determinar la disipación de energía

3.3. Otros tipos

Existen una diversidad de vertederos que pueden acomodarse a la gran diversidad de condiciones topográficas y operativas que una presa puede involucrar. Al no ser punto central de este trabajo de investigación solo se mencionan.

- Vertedero Morning Glory
- Vertedero de túnel
- Vertedero de canal
- Vertedero de orificio
- Vertedero laberinto
- Vertedero de sifón

CAPITULO IV: CASO DE ESTUDIO – VERTEDERO DE LA REPRESA DE COLTANI

1. INTRODUCCIÓN

La Presa Coltani y su área de embalse se encuentran ubicadas en el departamento de Tacna, la zona presenta un clima característico de alta puna, con temperatura que oscilan entre los 17°C hasta los -11°C. El orden de la precipitación es de 250 mm anuales, distribuidas entre los meses de diciembre y marzo. Esta estructura hidráulica ha sido proyectada considerando la confluencia de la quebrada Coltani y la quebrada Sombrerito. Además, involucra a las quebradas de Cerro Pelado, Chujalaca 1, Chujalaca 2, Chujalaca 3 y Chujalaca 4 en la margen derecha y las quebradas Pantara y Chapoco por la margen izquierda, cuyas aguas son conducidas hacia la represa a través de canales colectores para su almacenamiento y regulación. El volumen total de la represa es de 3.28 millones de metros cúbicos, de los cuales 0.52 millones de metros cúbicos corresponden al volumen muerto y 2.76 millones de metros cúbicos corresponden al volumen de agua útil embalsada. Finalmente, el nivel máximo ordinario (NAMO) del espejo de agua alcanza los 4116 m.s.n.m. con una extensión de 0.29 km².

2. UBICACIÓN

2.1. Ubicación política y geográfica

2.1.1 Ubicación política

El proyecto se encuentra ubicado políticamente en el distrito de Camilaca de la provincia de Candarave del departamento de Tacna, como se muestra en la Figura 58.

2.1.2 Ubicación geográfica

El cuerpo de la presa se encuentra ubicado en las siguientes coordenadas geográficas:

Longitud: 70°28'08.40" oeste Latitud: 17°12'22.35" sur

Las cuales corresponde a las siguientes coordenadas UTM (WGS84) de la Zona 19S:

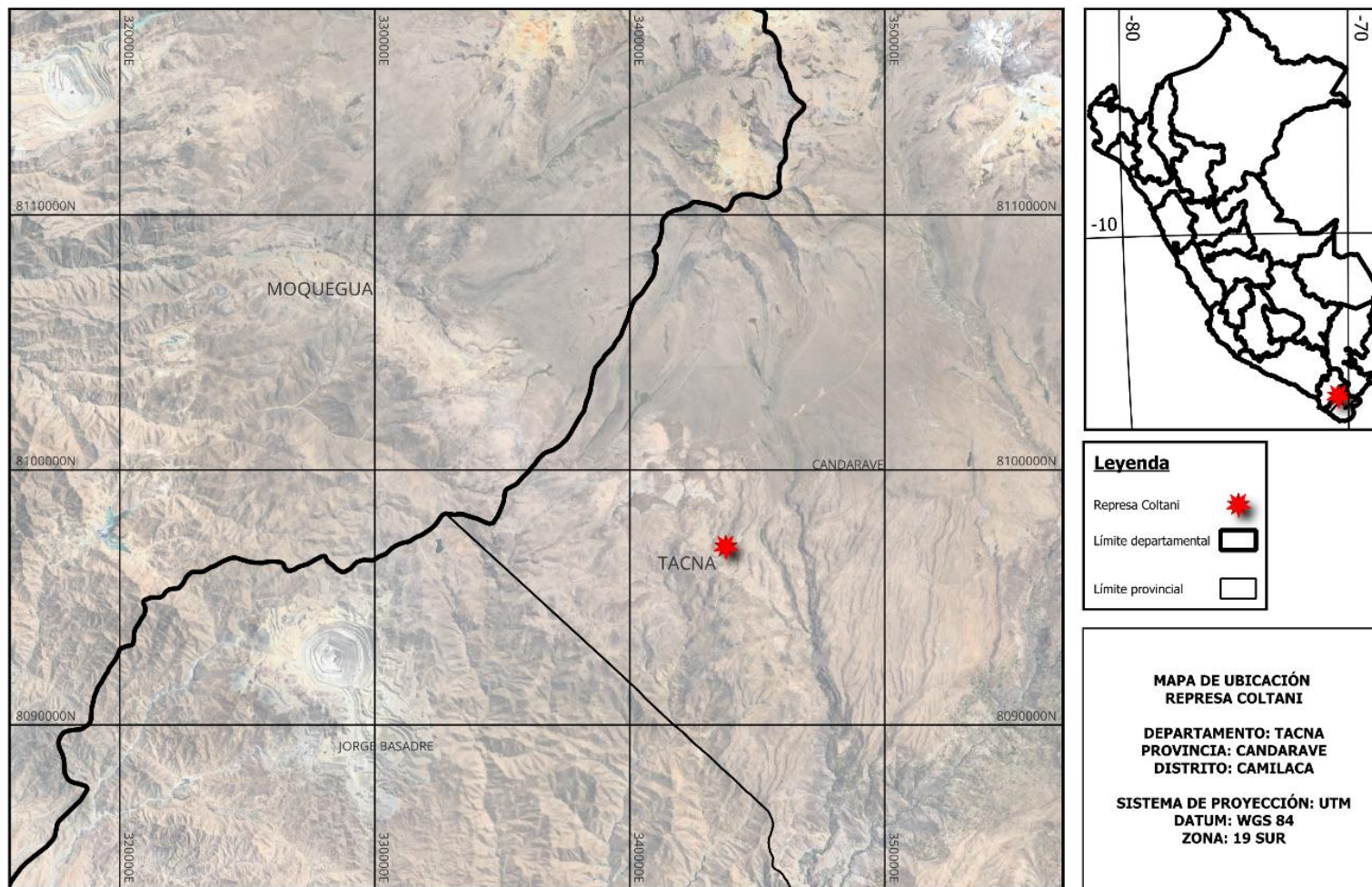
Este: 343,792.46 m Sur: 8'097,040.41 m

2.1.3 Altitud promedio

Las diferentes alturas características de la presa son: nivel de fondo de laguna: 4098.00 m.s.n.m y nivel de corona de la presa: 4118.00 m.s.n.m.

Figura 58

Mapa de ubicación de la represa Coltani



Nota: Elaboración propia

3. HIDROLOGIA

El estudio hidrológico se toma del servicio de consultoría de obra para la elaboración del expediente técnico de saldo de obra del proyecto: “Construcción de un sistema de almacenamiento y regulación en el sector de la Quebrada de Coltani para mejoramiento de áreas agrícolas, distrito de Ilabaya, Jorge Basadre, Tacna”.

Además, la información base es procesada para corroborar la correcta determinación de; la disponibilidad hídrica de las Quebradas de Pantara, Chapoco, Coltani, Chujalaca y Cerro Pelado, la capacidad de almacenamiento de la represa de Coltani y la definición de los parámetros que definen el diseño del vertedero para aliviar las máximas avenidas.

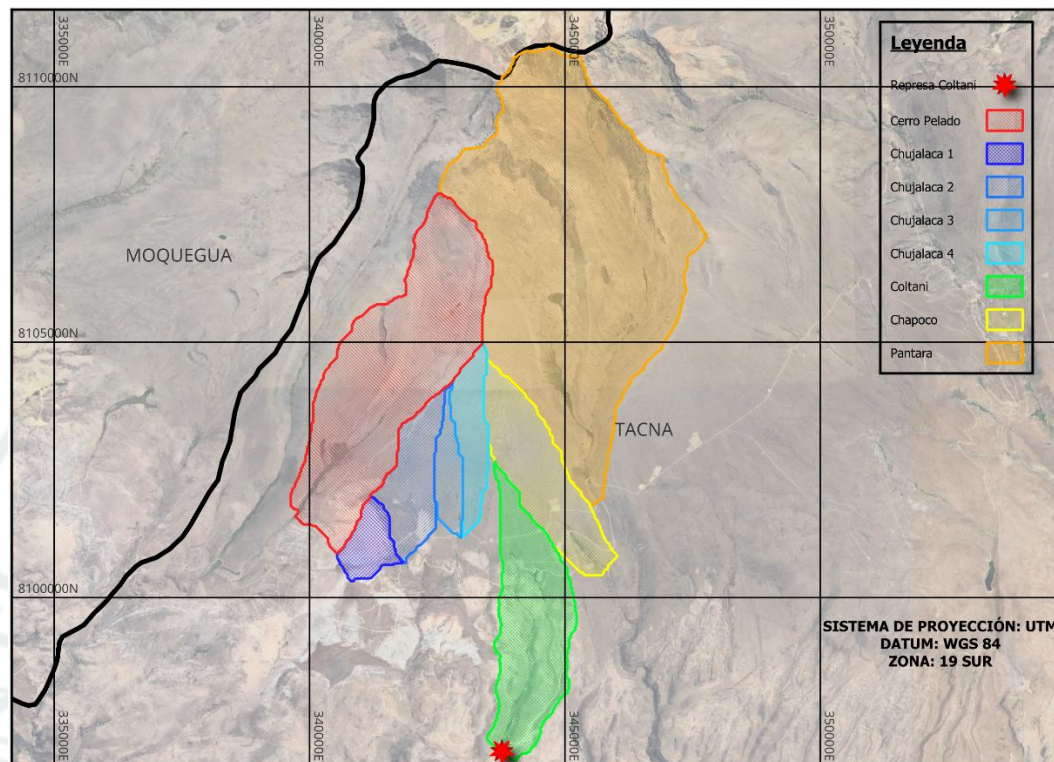
La información de precipitación, humedad relativa, velocidad de viento, horas de sol, temperaturas procesadas se ubican entre los años 1965 y 2019, y han sido extraídas de las estaciones Talabaya, Tarata, Susapaya, Sitajara, Candarave, Chuapalca, Challapalca, Villacota, Suches, Quebrada Honda y Tacalaya.

3.1. Parámetros geomorfológicos

Para la determinar la disponibilidad hídrica, es necesario definir los parámetros geomorfológicos de las subcuencas tributarias de la represa Coltani. Así, en la Figura 59 se muestra la delimitación de las subcuencas de Pantara, Chapoco, Coltani, Cerro de Pelados, Quebrada Chujalaca 1, Quebrada Chujalaca 2, Quebrada Chujalaca 3 y Quebrada Chulaca 4. Además, en la Tabla 3 se definen los parámetros geomorfológicos de cada una.

Figura 59

Delimitación de subcuentas tributarias de la represa Coltani.



Nota: Elaboración propia

Tabla 3

Parámetros geomorfológicos de las microcuencas de la represa Coltani

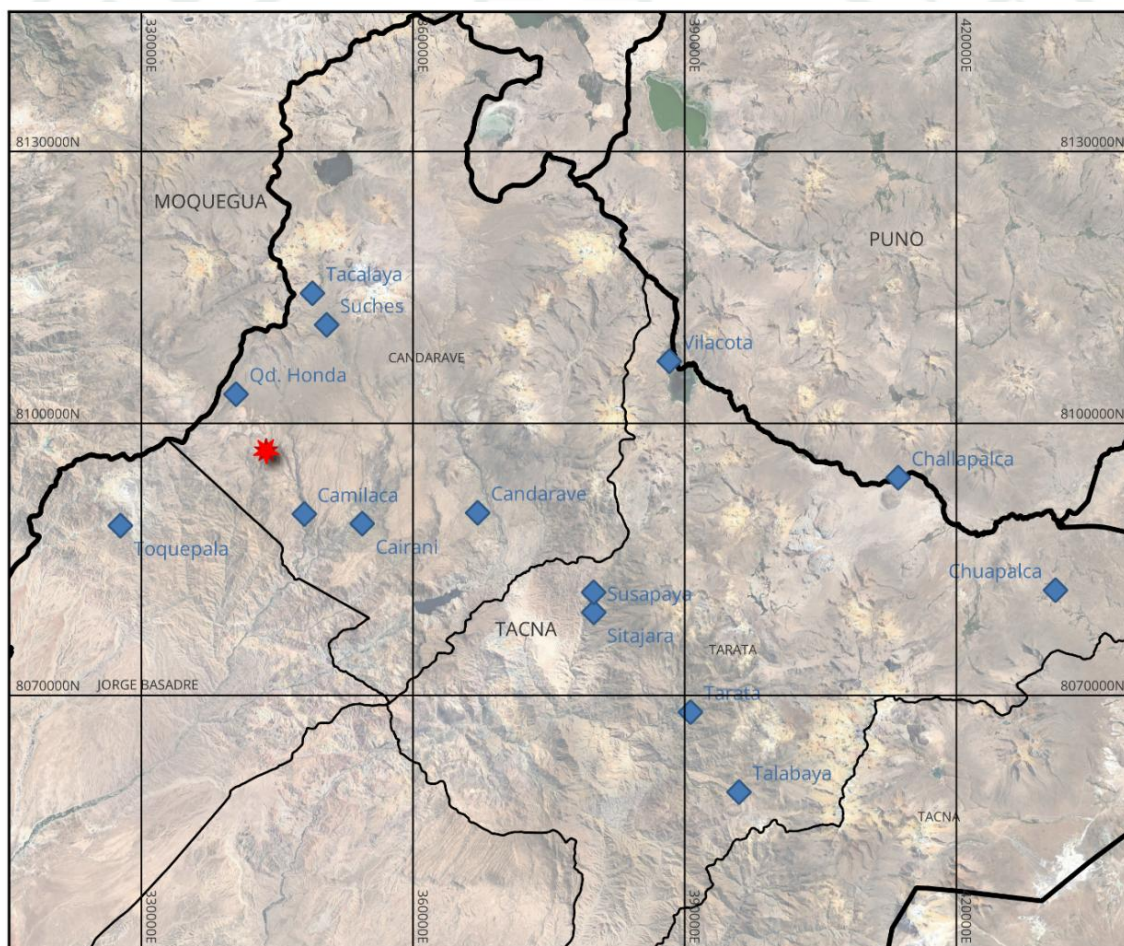
DESCRIPCIÓN			Subcuenca							
Tipo	Parámetro	und	Cerro Pelado	Chujalaca 1	Chujalaca 2	Chujalaca 3	Chujalaca 4	Coltani	Chapoco	Pantara
Superficie	Área	km ²	10.14	1.32	2.82	1.04	2.82	6.04	3.63	24.98
	Perímetro	km	14.72	4.7	8.85	8.01	10.03	12.73	9.71	22.57
Altitud	Media	msnm	4,693.10	4,426.20	4,500.50	4,492.90	4,533.10	4,240.50	4,530.70	4,778.70
	Máxima	msnm	5,002.00	4,500.00	4,751.90	4,752.30	4,850.00	4,500.50	4,850.00	5,181.90
	Mínima	msnm	4,350.00	4,012.30	4,300.20	4,300.00	4,300.00	4,150.00	4,352.70	4,349.60
Pendiente	Media	%	17.88	16.22	12.69	13.87	12.91	10.11	14.1	21.63
Red hídrica	Longitud del cauce principal	km	6.01	1.07	2.67	3.12	3.35	4.95	6.42	3.51
	Pendiente del cauce	%	8.07	15.23	11.95	12.82	12.21	5.4	7.65	11.88
Parámetros	Coefficiente de compacidad, Kc	-	1.3	1.15	1.49	2.22	1.66	1.46	1.44	1.27
	Factor de Forma, Kf	-	0.28	1.15	0.4	0.11	0.25	0.25	0.09	2.03
	Tiempo de concentración	hr	0.7	0.14	0.32	0.35	0.38	0.7	0.75	0.4
	Densidad de Drenaje (Dd)	km/km ²	0.59	0.81	0.95	3	1.19	0.82	1.77	0.14

Nota: Adaptado del expediente técnico

3.2. Registros meteorológicos

Las estaciones utilizadas para el análisis hidrológico son: Chuapalca, Quebrada Honda, Challapalca, Vilacota, Suches, Tarata, Sitajara, Susapaya, Candarave, Talabaya, Cairani, Camilaca y Toquepala, cuyas posiciones se muestran en la Figura 60. La información de estas estaciones han sido completadas y extendidas mediante el software HEC-4, siendo trabajadas en dos grupos con características meteorológicas distintas, los cuales se muestra en la Tabla 4 junto con sus características principales.

Figura 60
Ubicación de estaciones meteorológicas.



Nota: Elaboración propia

Tabla 4

Parámetros de las estaciones meteorológicas utilizadas.

GRUPO	Nombre	UTM este (m)	UTM norte (m)	Altitud (m)	Nº Valores	Fecha Inicio	Fecha Fin	Vertiente	Cuenca	Fuente
1	Qd. Honda	340447.50	8103235.10	4200	459	16/01/1966	16/12/2005	PACIFICO	LOCUMBA	SPCC
	Tacalaya	348877.80	8114364.50	4452	625	16/01/1952	16/12/2005	PACIFICO	LOCUMBA	SPCC
	Suches	350456.00	8110884.69	4452	563	16/01/1956	16/12/2005	PACIFICO	LOCUMBA	SPCC
	Challapalca	413562.47	8094020.45	4625	204	16/01/1994	16/12/2013	PACIFICO	MAURE	SENAMHI
	Chuapalca	430940.40	8081608.70	4180	572	16/01/1964	16/12/2012	PACIFICO	MAURE	SENAMHI
	Vilacota	388300.80	8106868.60	4390	497	16/01/1964	16/12/2012	PACIFICO	MAURE	SENAMHI
2	Cairani	354379.50	8088952.30	3386	597	16/01/1964	16/12/2013	PACIFICO	LOCUMBA	SENAMHI
	Camilaca	347992.70	8090012.60	3330	269	16/01/1964	16/12/1986	PACIFICO	LOCUMBA	SENAMHI
	Candarave	367129.20	8090145.50	3410	596	16/01/1964	16/12/2013	PACIFICO	LOCUMBA	SENAMHI
	Toquepala	327680.00	8088733.35	3650	554	16/01/1953	16/12/2002	PACIFICO	LOCUMBA	SPCC
	Tarata	390635.60	8068154.90	4067	578	16/01/1964	16/12/2012	PACIFICO	SAMA	SENAMHI
	Sitajara	379951.20	8079159.50	3166	500	16/01/1964	16/12/2006	PACIFICO	SAMA	SENAMHI
	Susapaya	379938.20	8081372.50	4390	514	16/01/1964	16/12/2006	PACIFICO	SAMA	SENAMHI
	Talabaya	395990.50	8059331.30	3458	566	16/01/1965	16/12/2012	PACIFICO	SAMA	SENAMHI

Nota: Adaptado del expediente técnico

De ambos grupos se determinó la precipitación mensual y la precipitación total, como se muestra en la Tabla 5, Tabla 6 y en las Figura 61 y Figura 62. Seguidamente, el análisis de consistencia se ejecutó mediante el método de vector regional, el cual genera una estación ficticia, a partir de los datos meteorológicos de las estaciones de cada grupo, la cual es utilizada para homogenizar, detectar inconsistencias y rellenar los datos de precipitación originales.

Tabla 5

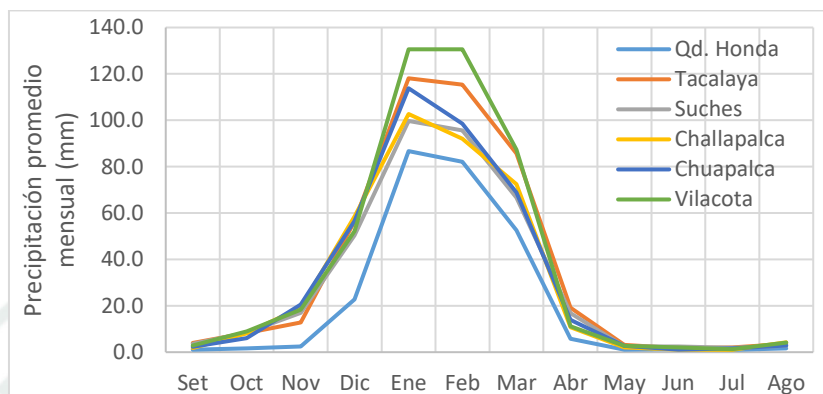
Precipitaciones mensuales y anuales promedio del grupo 1

Estacion	Set	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Total
Qd. Honda	1.1	1.7	2.5	22.7	86.7	82.1	52.5	5.8	1.1	1.3	1.0	1.7	260.2
Tacalaya	4.0	8.3	12.8	56.4	118.1	115.3	85.7	19.1	3.1	1.7	2.0	3.5	430.0
Suches	3.5	8.4	17.0	50.3	99.7	95.6	66.7	16.8	2.5	2.5	1.9	2.8	367.7
Challapalca	1.8	8.1	19.3	58.5	102.7	92.0	72.5	10.8	2.0	1.1	1.0	4.3	374.1
Chuapalca	2.3	6.1	20.5	56.6	113.8	98.5	68.8	13.9	2.7	1.1	1.6	2.9	388.8
Vilacota	2.9	8.9	18.4	52.1	130.6	130.6	87.4	11.1	2.7	2.1	1.3	4.1	452.2

Nota: Adaptado del expediente técnico

Figura 61

Representación gráfica de las precipitaciones mensuales y anuales promedio del grupo 1



Nota: Elaboración propia

Tabla 6

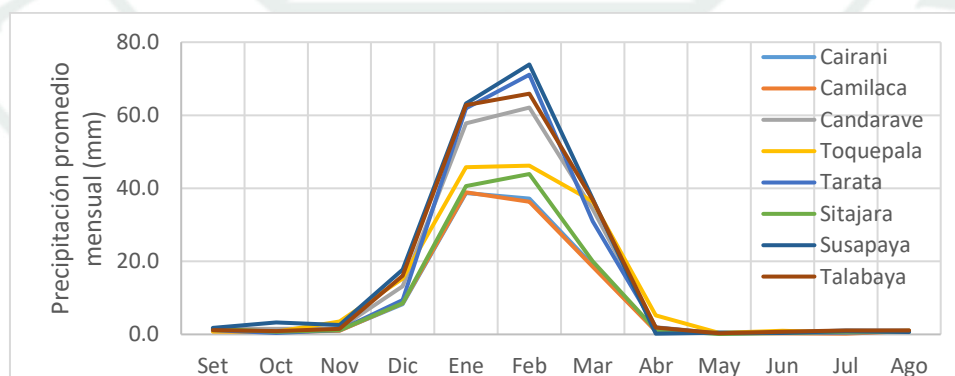
Precipitaciones mensuales y anuales promedio del grupo 2

Estaciones	Set	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Total
Cairani	1.2	0.7	1.1	8.3	38.7	37.2	19.0	1.0	0.5	0.5	1.1	1.0	110.3
Camilaca	0.8	0.6	1.0	8.5	38.9	36.3	18.5	0.9	0.4	0.3	0.2	0.9	107.3
Candarave	1.5	1.5	1.6	13.2	57.8	62.1	34.3	2.0	0.3	0.7	0.8	1.1	176.9
Toquepala	0.8	0.7	3.5	15.3	45.8	46.2	36.4	5.2	0.4	1.0	0.5	1.0	156.7
Tarata	1.2	0.4	1.2	9.4	61.9	71.1	31.0	1.9	0.2	0.5	0.5	0.8	180.1
Sitajara	1.5	0.7	1.2	8.5	40.6	43.9	20.0	1.3	0.1	0.4	0.7	0.7	119.3
Susapaya	1.8	3.3	2.6	17.7	63.2	73.9	37.1	0.2	0.5	0.4	0.9	0.6	202.4
Talabaya	1.2	0.9	1.5	16.1	62.8	65.9	36.8	1.9	0.3	0.7	1.1	1.1	190.2

Nota: Adaptado del expediente técnico

Figura 62

Representación gráfica de las precipitaciones mensuales y anuales promedio del grupo 2



Nota: Elaboración propia

3.3. Demanda de agua

La demanda de agua se determina para los sectores de riego de Borogueña, Cojmani-Vilalaca y el sector de ampliación de frontera agrícola a partir de la evapotranspiración potencial, el periodo vegetativo y los coeficientes Kc de los cultivos. Finalmente, la demanda bruta considera las cédulas de cultivos, áreas de riego, eficiencia de conducción, distribución y aplicación.

3.3.1 Evapotranspiración Potencial

Se determino una evapotranspiración potencial de 3.71 mm/mes a partir de los datos de temperatura máxima y mínima, humedad relativa, velocidad de viento y horas de sol los que se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7
Cálculo de evapotranspiración potencial

País:	Perú			Estación:	Borogueña		
Altitud:	3420	msnm		Latitud	17.33°S	Longitud:	70.33°O
Mes	Mín Temp	Max Temp	Humedad	Viento	Sol	Radiación	Eto
	°C	°C	%	km/día	horas	MJ/m2/día	mm/día
Enero	3.7	17.8	56	164	8.0	23.1	4.25
Febrero	3.8	17.7	57	130	7.6	22.1	3.98
Marzo	3.3	17.9	55	156	7.5	20.6	3.81
Abril	2.6	18.4	54	190	8.8	20.3	3.74
Mayo	2.0	17.3	55	190	9.0	18.1	3.20
Junio	1.3	16.8	54	181	9.1	17.0	2.92
Julio	0.9	16.1	58	181	9.5	18.0	2.91
Agosto	1.4	16.9	62	190	9.6	20.3	3.31
Setiembre	1.8	17.5	75	190	9.5	22.6	3.58
Octubre	2.3	18.4	70	190	9.8	24.9	4.17
Noviembre	2.8	18.3	67	190	9.7	25.6	4.38
Diciembre	3.5	18.6	64	173	8.5	23.9	4.30
Promedio	2.5	17.6	61	177	8.9	21.4	3.71

Nota: Adaptado del expediente técnico

3.3.2 Precipitación efectiva

Se determino la precipitación efectiva según la fórmula de la USDA Soil Conservation Service con los datos de la estación Cairani, los resultados se muestran en la Tabla 8.

$$P_{eff} = P_{mensual} * \frac{125 - 0.2 * P_{mensual}}{125} \text{ para } P_{mensual} \leq 250 \text{ mm}$$

$$P_{eff} = 1.25 + 0.1 * P_{mensual} \text{ para } P_{mensual} > 250 \text{ mm}$$

Tabla 8

Cálculo de la precipitación efectiva

Mes	Precipitación	Precipitación efectiva
	mm	mm
Enero	37.6	35.3
Febrero	35.0	33.0
Marzo	18.6	18.0
Abril	1.1	1.1
Mayo	0.5	0.5
Junio	0.4	0.4
Julio	1.2	1.2
Agosto	1.1	1.1
Setiembre	1.5	1.5
Octubre	0.9	0.9
Noviembre	1.4	1.4
Diciembre	9.5	9.4
Total	108.8	103.9

Nota: Adaptado del expediente técnico

3.3.3 Demanda de agua

Se define primero para las cuatro zonas de beneficio (Cojmani, Vilalca, Borogueña y la ampliación) las celdas para cada tipo de cultivo (alfalfa, maíz amiláceo, papa y orégano) como se detalla en la Tabla 9.

Tabla 9

Celdas de cultivos de las zonas de beneficio

Cedulas de Cultivos	Zona de beneficio (ha)				Total
	Cojmani	Vilalca	Borogueña	Ampliación	
Alfalfa	1.24		5.91		7.15
Maíz amiláceo			14.86		14.86
Papa			0.93		0.93
Orégano	98.96	57.09	14.96	75.69	246.7
Total	100.2	57.09	36.66	75.69	269.64

Nota: Adaptado del expediente técnico

A continuación, se determina las demandas de agua considerando al área de riego, la cedula de cultivo y la eficiencia de riego, los resultados se muestran en la Tabla 10.

$$Uso\ consuntivo = Eto * Kc$$

$$Requerimiento\ (mm) = UC - P_{efectiva}$$

$$Requerimiento\ volumetrico(m^3/ha) = Requerimiento[mm] * \frac{1\ m}{1000\ mm} * \frac{10000\ m^2}{1\ ha}$$

$$Módulo\ de\ riego\ (lt/s/ha) = \frac{RV}{Eficiencia} * \frac{1000\ lt}{1\ m^3} * \frac{1}{días * horas * minutos * segundos}$$

$$Q_{demandado} = Área * MR$$

Tabla 10

Demanda de agua de las zonas de beneficio

DEMANDA DE AGUA (M3/S)													
Cultivos	Ene	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Set.	Oct.	Nov.	Dic.	Prom
Cojmani	0.068	0.059	0.079	0.1	0.086	0.078	0.077	0.088	0.095	0.111	0.116	0.104	0.088
Vilacaca	0.038	0.033	0.045	0.057	0.049	0.044	0.044	0.05	0.054	0.063	0.066	0.059	0.05
Borogueña	0.032	0.03	0.034	0.037	0.034	0.033	0.032	0.035	0.036	0.041	0.043	0.04	0.036
Ampliación Frontera	0.051	0.044	0.059	0.075	0.065	0.059	0.058	0.066	0.071	0.084	0.088	0.078	0.066
Total (m3/s)	0.189	0.166	0.217	0.269	0.234	0.214	0.211	0.239	0.256	0.299	0.313	0.281	0.24
Total (MMC)	0.506	0.401	0.58	0.695	0.625	0.556	0.565	0.64	0.663	0.803	0.811	0.751	7.596

Nota: Adaptado del expediente técnico

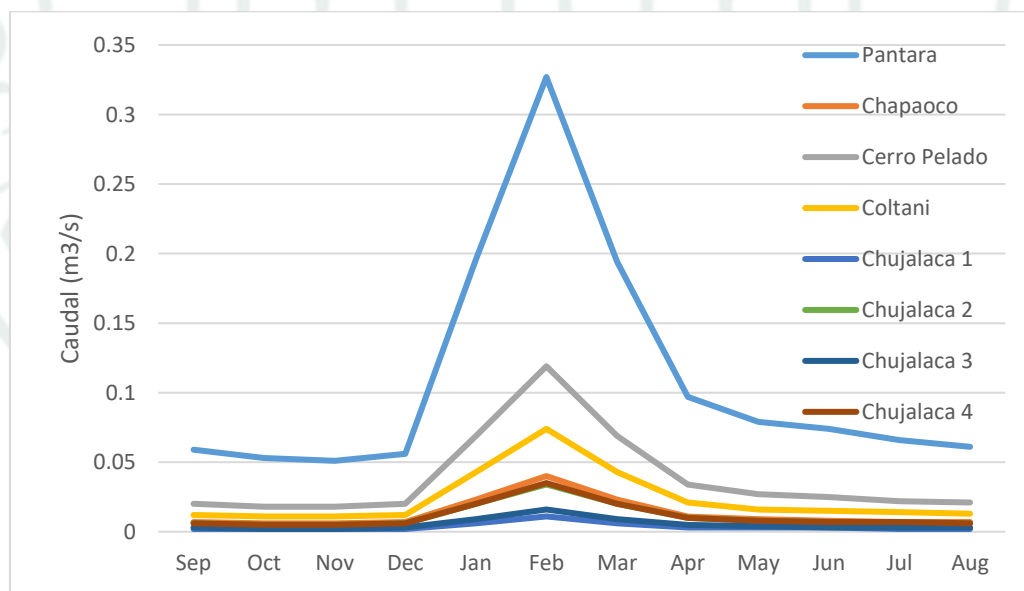
3.3.4 Generación de descargas

Se ejecuto mediante el software WEAP (Water Evaluation and Planning System), utilizando el algoritmo de humedad de suelo, el cual usa dos capas de suelo para simular la cuenca. A su vez, divide la cuenca en “n” subcuencas sobre las cuales se realiza el balance de masa para determinar la escorrentía total. Este algoritmo considera que la capa superior incluye los aportes de la precipitación y el derretimiento de hielo, así como la precipitación. Además, considera como perdidas la evapotranspiración y los flujos de caudal. Adicionalmente, existe percolación hacia la capa más profunda el cual es incluido en la simulación como flujo base. Finalmente, la escorrentía total resulta de la escorrentía directa, escorrentía superficial, escorrentía subsuperficial y el flujo base de las capas más profundas. El modelo es instantáneo, es decir no toma en cuenta el tiempo de tránsito de los caudales.

Es así que, a partir de los datos de precipitación total mensual, datos climatológicos de la zona, y las características geomorfológicas de las microcuencas, cobertura vegetal, tipo de suelo, factor Kc de la vegetación y otros parámetros se determina la escorrentía para cada uno de los tributarios de la represa Coltani como se grafica en la Figura 63.

Figura 63

Hidrograma promedio mensual de cada tributario.



Nota: Elaboración propia

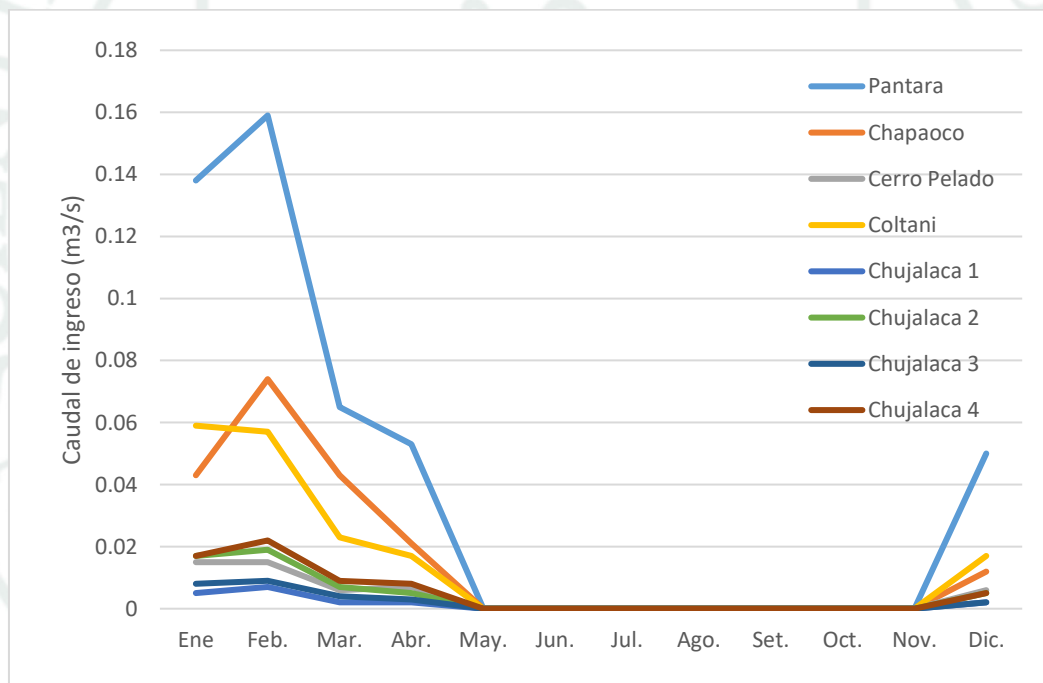
3.3.5 Simulación de embalse

La simulación de embalse es requerida para la determinación del volumen de almacenamiento y altura de la presa, considerando el esquema hidráulico, considerando la captación de las quebradas, el volumen máximo y mínimo de operación y la salida de agua de la represa Coltani.

Para el esquema hidráulico solo se considera el periodo de lluvias de diciembre a abril, considerando el caudal hidrológico establecido por la Autoridad Nacional de Agua (15% del promedio mensual). La captación es a través de bocatomas y derivada a través de canales hasta la represa. El promedio de aporte mensual de las quebradas a derivar ha sido calculado como $0.086 \text{ m}^3/\text{s}$, mientras que el aporte mensual de cada tributario de grafica en Figura 64.

Figura 64

Aportes promedio mensual de las diferentes cuencas



Nota: Elaboración propia

Según la batimetría del embalse se espera una relación de volumen y elevación como se muestra en la Tabla 11.

Tabla 11

Relación capacidad-volumen de almacenamiento de la represa Coltani

Volumen (MMC)	Elevación (m.s.n.m)
0	4098
0.2	4101.5
0.4	4103.2
0.6	4105
0.8	4106.2
1	4107.2
1.2	4108.3
1.4	4109.2
1.6	4110.2
1.8	4111.2
2	4112
2.2	4113
2.4	4113.7
2.6	4114.5
2.8	4115.2
3	4116
3.2	4116.8
3.4	4117.2
3.6	4118
3.8	4118.7
4	4119.1
5	4122

Nota: Adaptado del expediente técnico

El volumen muerto se determina considerando registros históricos de transporte de sedimentos del río Sama, el cual tiene una concentración promedio de 3.8 g/lit . Considerando un factor de seguridad de 1.3 se define la concentración de sedimentos como 4.94 g/lit . Seguidamente, se considera un volumen anual de 2.76 MMC y un peso específico de 1310 kg/m^3 para un periodo de 50 años de operación. Definiendo así un volumen muerto de

$$\text{Volumen muerto [MMC]} = 2.76 [\text{MMC}] * 4.94 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 50 \text{ años} * \frac{1}{1310 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$$

$$\text{Volumen muerto} = 0.52 \text{ MMC}$$

Finalmente, múltiples simulaciones hidrológicas son realizadas para determinar el volumen adecuado de la represa, considerando el volumen muerto. Así, se concluye que un volumen de 3.28 MMC (incluido el volumen muerto) es el más apropiado para equilibrar la oferta y salida promedio, considerando un índice de confiabilidad en tiempo y volumen superior a 90%.

3.3.6 Máximas avenidas

Las máximas avenidas son necesarias para determinar los caudales máximos de diseño para diferentes periodos de retorno y así dimensionar el vertedero de demasías. Al no contar con registros de eventos extremos máximos en el área de la presa, se utilizará los datos de precipitación máxima en 24 horas de la estación Tacalaya, con estos datos se realiza el análisis de frecuencia, y seguidamente el Método de Numero de Curva para determinar los caudales máximos de diseño.

3.3.6.1. Análisis de frecuencia

A partir de los datos de precipitación máxima en 24 horas de la estación Tacalaya se determina mediante una distribución estadística normal y usando el criterio de Kolmogorov-Smirnov con un $D_{max} = 0.076$ las precipitaciones máximas en 24 hr para diferentes periodos de retornos, los cuales se detallan en la Tabla 12.

Tabla 12

Precipitación máxima en 24 horas para diferentes periodos de retorno.

Periodo de retorno (años)	2	5	10	20	50	100	200	500	1,000	2,000
Precipitación máxima en 24 hr (mm)	26.75	31.63	34.18	36.29	38.66	40.24	41.68	43.44	44.67	45.83

Nota: Adaptado del expediente técnico

3.3.6.2. Periodo de retorno

El periodo de retorno es el tiempo promedio en que se supera o iguala el caudal pico de una avenida una vez cada “T” años. Suponiendo que estos eventos suceden independientemente cada año, se define la relación entre la probabilidad de excedencia del caudal, la vida útil de la presa y el riesgo admisible de falla. Siendo el riesgo de falla admisible R

$$R = 1 - (1 - 1/T)^n$$

Donde T es el periodo de retorno y n es la vida útil de la estructura. Es así que, para una vida útil de la estructura de 50 años, y un periodo de retorno de 1000 años se espera un riesgo admisible menor a 5%.

3.3.7 Numero de curva

Se selecciona el número de curva según las características del suelo y la cobertura que presente. En este caso se toma un numero de curva de 86, correspondiente a pastizales en condiciones pobres.

3.3.8 Máximas avenidas

Se utilizo HEC-HMS v 4.0 para generar los caudales de máximas avenidas para diferentes periodos de retorno. El programa usa el modelo la cuenca, con sus parámetros físicos para definir el escurrimiento superficial y la forma del hidrograma, y el modelo meteorológico, definiendo la tormenta de diseño para obtener la relación de la precipitación y la escorrentía.

El tiempo de concentración, es el tiempo que tarda una gota en la posición hidráulicamente más alejada en llegar al punto de salida de la cuenca y se determina mediante la fórmula de Kirpich

$$t_c = 0.06628 * \frac{L^{0.77}}{S^{0.385}}$$

Donde L es la longitud del cauce principal en kilómetros y S es la pendiente del cauce principal en m/m

Precipitación efectiva (Pe), es la precipitación que no es retenida en la superficie terrestre y que tampoco se infiltra. El método SCS para abstracciones define que Pe siempre es menor o igual a la profundidad de precipitación P , así mismo, una vez que la escorrentía inicia la profundidad de agua retenida (Fa) es menor o igual a la retención potencial máxima S . Primero existe una abstracción inicial (Ia) donde no ocurre escorrentía, superada esta abstracción se define la escorrentía potencial como la diferencia entre P y Ia .

Entonces, se aplica el método del número de curva para diferentes periodos de retorno y considerando una distribución normal de los datos meteorológicos obteniendo para la Quebrada Coltani la Tabla 13 que muestra los caudales máximos instantáneos en 24 horas para diferentes periodos de retorno.

Tabla 13

Caudales máximos instantáneos para diferentes periodos de retorno de la Quebrada Coltani.

Periodo de retorno (años)	2	5	10	20	50	100	200	500	1,000	2,000
Qmax instantáneos en 24 horas (m ³ /s)	5.2	8.4	10.2	11.8	13.6	14.9	16.1	17.5	18.5	19.6

Nota: Adaptado del expediente técnico

Finalmente, el hidrograma triangular unitario se construye para la cuenca según su área, longitud del cauce principal y la pendiente media.

4. HIDRÁULICA

4.1. Diseño del vertedero

Con la simulación del tránsito de avenidas en la presa Coltani, se puede definir la longitud del vertedero que permita aliviar una avenida extraordinaria para el periodo de retorno de 1000 años y de este modo definir el Nivel de Aguas Máximas Extraordinarias (NAME)

4.2. Altura de cresta del vertedero

Este nivel corresponde al Nivel de Aguas Máximas Ordinarias (NAMO) y está directamente relacionado con el Volumen NAMO el cual incluye el volumen que está por debajo del nivel de aguas mínimas y el volumen útil de la presa.

$$V_{NAMIN} = 0.52 \text{ MMC}$$

$$V_{Util} = 2.76 \text{ MMC}$$

$$V_{NAMO} = V_{NAMIN} + V_{Util} = 3.28 \text{ MMC}$$

Este volumen corresponde a la cota:

$$NAMO = 4116 \text{ m.s.n.m.}$$

4.3. Avenida de diseño

Del estudio hidrológico se determinó una avenida máxima extraordinaria para el periodo de retorno milenario de:

$$Q_{1000 \text{ años}} = 18.53 \text{ m}^3/\text{s}$$

Se considero en el diseño un vertedero rectangular, para el cual se puede calcular el caudal de salida según:

$$Q = CLH^{3/2}$$

Donde Q es el caudal en m^3/s , C es coeficiente de descarga y H es la altura del vertedero y L el largo del vertedero. Es así que para diferentes alturas se obtiene distintos valores de descarga considerando una longitud de vertedero de 8 metros, según se muestra en la Tabla 14.

Tabla 14

Caudales de salida para diferentes alturas de operación del vertedero.

Altitud (m.s.n.m)	Altura (m)	Coeficiente descarga	Longitud (m)	Caudal (m ³ /s)
4116	0	1.8	8	0.00
4116.1	0.1	1.8	8	0.46
4116.2	0.2	1.8	8	1.29
4116.3	0.3	1.8	8	2.37
4116.4	0.4	1.8	8	3.64
4116.5	0.5	1.8	8	5.09
4116.6	0.6	1.8	8	6.69
4116.7	0.7	1.8	8	8.43
4116.8	0.8	1.8	8	10.30
4116.9	0.9	1.8	8	12.29
4117	1	1.8	8	14.40
4117.1	1.1	1.8	8	16.61
4117.2	1.2	1.8	8	18.93
4117.3	1.3	1.8	8	21.34
4117.4	1.4	1.8	8	23.85
4117.5	1.5	1.8	8	26.45
4117.6	1.6	1.8	8	29.14
4117.7	1.7	1.8	8	31.92
4117.8	1.8	1.8	8	34.78
4117.9	1.9	1.8	8	37.71
4118	2	1.8	8	40.73

Nota: Adaptado del expediente técnico

4.4. Caudal de salida

El tránsito de la avenida máxima extraordinaria milenaria se modela considerando un vertedero de 8 metros de longitud mediante el programa HEC-HMS v. 4.0.

$$Q_{entrada} = 18.53 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_{salida} = 1.62 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H_{salida} = 0.23 \text{ m}$$

Esta reducción del caudal representa un amortiguamiento del 91% gracias a la presencia de la presa Coltani ante una avenida milenaria. Sin embargo, considerando la importancia de esta estructura se considera una altura mayor para el diseño del vertedero y sobre todo de sus paredes laterales, es así que la altura y caudal de diseño son:

$$H_{diseño} = 0.50 \text{ m}$$

$$Q_{diseño} = 5 \text{ m}^3/\text{s}$$

4.5. Diseño geométrico del vertedero

El vertedero de la presa Coltani es un vertedero lateral el cual consiste de: un canal de aproximación con una cresta lateral, un canal de descarga y una estructura final de disipación de energía. Es así que, como se definió en la sección 4.4 Caudal de salida, la longitud de la cresta del vertedero lateral es de 8 metros. Además, el canal de descarga este compuesto por 5 secciones que varían en longitud, pendiente, orientación y alto de muros laterales, según se describe en la Tabla 15.

Tabla 15
Detalles geométricos del vertedero de la represa Coltani.

Sección	DH (m)	DV (m)	Longitud (m)	Pendiente (%)	Orientación (°)	Alto muros (m)
1	36.00	-0.36	36.00	1	0	3.60
2	36.00	-3.60	36.18	10	23	1.70
3	48.00	-9.60	48.95	20	23	1.20
4	20.58	-5.76	21.37	28	23	0.70
5	39.42	-11.04	40.94	28	40	0.70

Nota: Adaptado del expediente técnico

La estructura de disipación final consiste de un enrocado de 2 metros de profundidad, de 10 metros de largo, 10 metros de ancho y una caída con respecto a la última sección del canal de metros.

CAPITULO V: METODOLOGÍA

1. METODOLOGÍA PROPUESTA

En este apartado se establecen los fundamentos del método científico necesarios para orientar la investigación, definiendo las variables de estudio, así como el tipo y nivel de la investigación, el diseño de la investigación y los métodos necesarios para llevarla a cabo.

1.1. Tipo y Nivel de Investigación

Según los fundamentos teóricos de metodología de investigación (Hernandez Sampieri et al., 2014), el tipo de investigación puede clasificarse según diversas perspectivas, partiendo de la premisa de los objetivos trazados, es así que la presente investigación se define:

- Según la orientación, como una investigación de tipo aplicada, ya que se utilizarán diversas metodologías existentes para alcanzar los objetivos de la investigación.
- Según el alcance, como una investigación de tipo correlacional, ya que se espera asociar las variables con las predicciones obtenidas, cuantificando la relación entre ellas.
- Según el diseño, como una investigación de tipo no experimental, ya que la manipulación intencional las variables independientes se controlarán mediante simulaciones computacionales que permitan analizar el comportamiento de las variables dependientes.
- Según los datos empleados, como una investigación cuantitativa, ya que las variables son cuantificables, permitiendo la iteración de los experimentos y la comparación de los resultados.

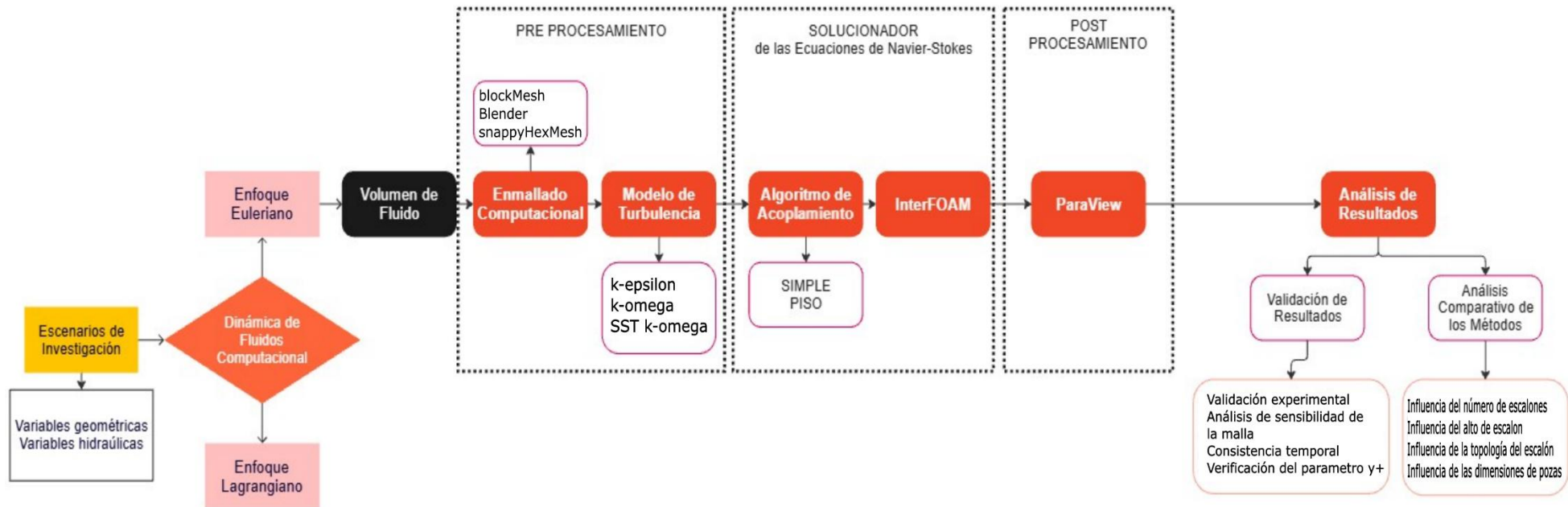
1.2. Diseño de la Investigación

Con el fin de responder las preguntas de investigación y cumplir los objetivos trazados se utiliza la dinámica de fluidos computacional para definir el efecto de la incorporación de un tramo escalonado en un vertedero existente, considerando variables como el número, ancho, alto o forma del escalón, sobre la energía disipada y los campos de velocidades desarrollados.

1.3. Métodos de Investigación

La investigación corresponde a la línea de estudio de la Hidráulica y la Hidrología. Se definen a continuación la metodología que se seguirá para alcanzar los objetivos de la investigación. Las diferentes fases de la investigación, así como los instrumentos y datos necesarios para alcanzar cada uno de los objetivos propuestos. La Figura 65 muestra diagrama de flujo utilizado para ejecutar cada experimento.

Figura 65
Diagrama de flujo metodológico



Nota: Elaboración propia

1.3.1 Escenarios de Investigación

Las condiciones geométricas e hidráulicas a modelar serán basadas en el vertedero de la represa de Coltani. A partir de este se introducirá en la tercera sección del canal de descarga un tramo escalonado, sobre el cual se manipularán las variables geométricas: número de escalón, altura de escalón y forma del escalón. La Tabla 16 muestra los escenarios de investigación planteados.

Tabla 16
Escenarios de investigación

Tipo de	Número	Alto de escalón	Alto de poza	Ancho de Poza	Total
Sin escalones	-	-	-	-	1
Regular	9	10	-	-	6
		20			
	19	30			
Poza rectangular	9	10	20	20	12
		20	30	30	
		30			
Poza triangular	9	10	20	20	12
		20	30	30	
		30			
					31

Nota: Elaboración propia

1.4. Zona de Estudio

La presente investigación se realizará sobre el vertedero de la represa Coltani, ubicada en la región de Tacna como se detalló en el CAPITULO IV: CASO DE ESTUDIO – VERTEDERO DE LA REPRESA DE COLTANI. Por lo tanto, dada la naturaleza computacional de la investigación se tienen en cuenta factores ambientales que influyen en el comportamiento de los fluidos como la presión ambiental local, la densidad y viscosidad del agua.

2. SISTEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA

El presente trabajo de investigación utiliza la geometría existente del vertedero de la represa de Coltani para proponer alternativas de diseño, incorporando nuevas características geométricas a esta estructura hidráulica en busca de mejorar su eficiencia hidráulica. En el capítulo anterior, en la sección 4.5 Diseño geométrico del vertedero se detalló las condiciones geométricas de esta estructura hidráulica, así como las condiciones hidráulicas bajo las cuales debería operar ante una avenida extraordinaria milenaria. Por lo tanto, a partir de estas condiciones iniciales, y aplicando técnicas de la dinámica de fluidos computacional, es que se modela la estructura original y todas las variantes propuestas para poder determinar criterios de diseño que permitan mejorar la eficiencia hidráulica de esta obra hidráulica a partir de la inclusión de vertederos escalonados en la estructura original.

2.1. Criterios de similitud

Como se menciona en la sección Limitaciones, este trabajo de investigación está condicionado por el poder computacional de los materiales utilizados. Es así que, el modelo original del vertedero ha sido escalado geométricamente por un factor de 10, lo que implica que las variables de todas las dimensiones deben ser escaladas según el tipo de fuerzas que gobiernen el movimiento del fluido.

Entonces, considerando que la dinámica del flujo del vertedero está dominada por las fuerzas gravitacionales e inerciales, se ha elegido la similitud de Froude para el escalamiento de las magnitudes del modelo computacional, la cual se basa en el número de Froude para establecer los factores de escala a utilizar para todas las magnitudes.

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

Para mantener esta semejanza dinámica gravitacional se debe procurar que el número de Froude del modelo sea igual al número de Froude de la estructura real

$$Fr_{modelo} = Fr_{prototipo\ real}$$

Considerando una escala geométrica de 1 en 10 tenemos que $L_p = 10 * L_m$, entonces:

$$\frac{V_m}{\sqrt{g * L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g * L_p}}$$
$$\frac{V_m}{\sqrt{g * L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g * 10 * L_m}}$$

$$V_m = \frac{V_p}{\sqrt{10}}$$

Se establece la relación entre las velocidades del modelo y del prototipo real. A partir de esta relación se puede determinar la relación temporal

$$\frac{L_m}{t_m} = \frac{L_p}{t_p * \sqrt{10}}$$

$$\frac{L_m}{t_m} = \frac{10 * L_m}{t_p * \sqrt{10}}$$

$$t_m = \frac{t_p * \sqrt{10}}{10} * \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

$$t_m = \frac{t_p}{\sqrt{10}}$$

De la misma manera para las demás magnitudes, considerando una escala geométrica de 1 en 10 se tiene los factores de escala en la Tabla 17.

Tabla 17
Factores de escala para diferentes magnitudes.

Magnitud	Relación	Factor m/p
Longitud (L)	L_r	1/10
Área (A)	L_r^2	1/100
Volumen (V)	L_r^3	1/1000
Velocidad (v)	$\sqrt{L_r}$	$1/\sqrt{10}$
Tiempo (T)	$\sqrt{L_r}$	$1/\sqrt{10}$
Caudal (Q)	$\sqrt{L_r}^5$	$1/\sqrt{10}^5$
Aceleración (a)	1	1
Fuerza (F)	L_r^3	1/1000
Presión (p)	L_r	1/10
Energía (E)	L_r^4	1/10000

Nota: Elaboración propia

2.2. Escenarios Planteados

Se parte del vertedero de la represa de Coltani como base del estudio propuesto, a partir de este conjunto de canales se ha propuesto modificar el tercer tramo que tiene una longitud de 48.95 m y desarrolla una pendiente de 20° . Es así que, en este tramo se ha incorporado diferentes tipos de vertederos escalonados para determinar que configuración resulta en una mayor eficiencia hidráulica de la estructura.

La combinación de diferentes factores como número, longitud, alto y forma de escalón han permitido definir 31 escenarios de investigación los cuales se resumen en la Tabla 18. Además, sus características geométricas se grafican en la Figura 66, donde a) corresponde a 9 escalones simples con alto de escalón variable, b) corresponde a 19 escalones simples con alto de escalón variable, c) corresponde a 9 escalones con poza cuadrada de $0.2\text{m} \times 0.2\text{m}$ con alto de escalón variable, d) corresponde a 9 escalones con poza triangular de $0.2\text{m} \times 0.2\text{m}$ con alto de escalón variable, e) corresponde a 9 escalones con poza cuadrada de $0.2\text{m} \times 0.3\text{m}$ con alto de escalón variable, f) corresponde a 9 escalones con poza triangular de $0.2\text{m} \times 0.3\text{m}$ con alto de escalón variable, g) corresponde a 9 escalones con poza cuadrada de $0.3\text{m} \times 0.2\text{m}$ con alto de escalón variable, h) corresponde a 9 escalones con poza triangular de $0.3\text{m} \times 0.2\text{m}$ con alto de escalón variable, i) corresponde a 9 escalones con poza cuadrada de $0.3\text{m} \times 0.3\text{m}$ con alto de escalón variable y j) corresponde a 9 escalones con poza triangular de $0.3\text{m} \times 0.3\text{m}$ con alto de escalón variable.

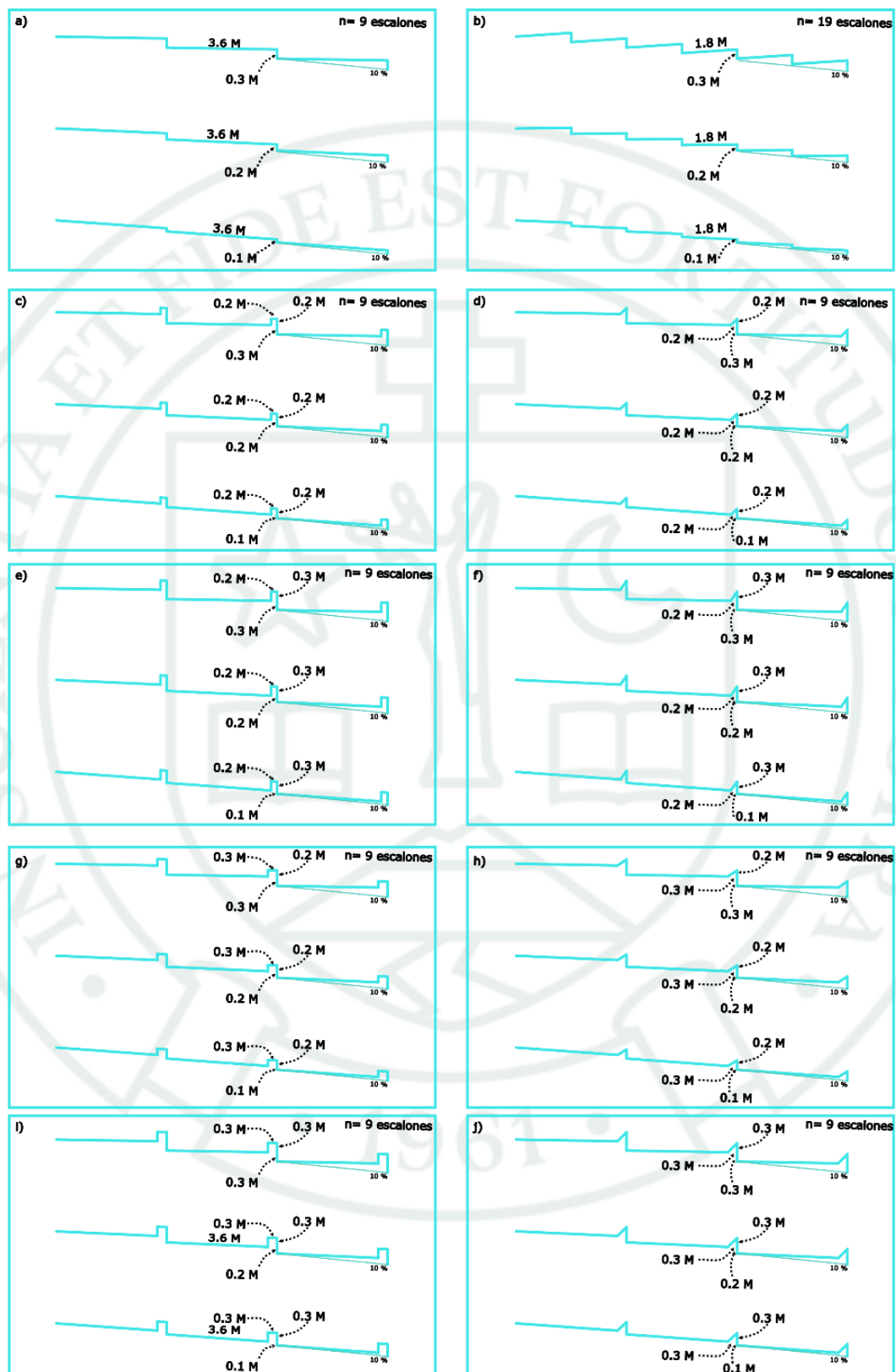
Tabla 18

Escenarios a simular computacionalmente

#	NOMBRE	TRAMO	NUMERO DE ESCALONES	LONGITUD DE ESCALON	ALTO DE ESCALON	FORMA	DIMENSIONES ADICIONALES	
							b	h
1	original	-	-	-	-	-	-	-
2	escalones_1	3	9	0.48	0.01	Normal	-	-
3	escalones_2	3	9	0.48	0.02	Normal	-	-
4	escalones_3	3	9	0.48	0.03	Normal	-	-
5	escalones_4	3	19	0.24	0.01	Normal	-	-
6	escalones_5	3	19	0.24	0.02	Normal	-	-
7	escalones_6	3	19	0.24	0.03	Normal	-	-
8	pooled_2x2_0.01	3	9	0.24	0.01	Poza rectangular	0.02	0.02
9	pooled_2x3_0.01	3	9	0.24	0.01	Poza rectangular	0.02	0.03
10	pooled_3x2_0.01	3	9	0.24	0.01	Poza rectangular	0.03	0.02
11	pooled_3x3_0.01	3	9	0.24	0.01	Poza rectangular	0.03	0.03
12	pooled_2x2_0.02	3	9	0.24	0.02	Poza rectangular	0.02	0.02
13	pooled_2x3_0.02	3	9	0.24	0.02	Poza rectangular	0.02	0.03
14	pooled_3x2_0.02	3	9	0.24	0.02	Poza rectangular	0.03	0.02
15	pooled_3x3_0.02	3	9	0.24	0.02	Poza rectangular	0.03	0.03
16	pooled_2x2_0.03	3	9	0.24	0.03	Poza rectangular	0.02	0.02
17	pooled_2x3_0.03	3	9	0.24	0.03	Poza rectangular	0.02	0.03
18	pooled_3x2_0.03	3	9	0.24	0.03	Poza rectangular	0.03	0.02
19	pooled_3x3_0.03	3	9	0.24	0.03	Poza rectangular	0.03	0.03
20	triangle_2x2_0.01	3	9	0.24	0.01	Poza triangular	0.02	0.02
21	triangle_2x3_0.01	3	9	0.24	0.01	Poza triangular	0.02	0.03
22	triangle_3x2_0.01	3	9	0.24	0.01	Poza triangular	0.03	0.02
23	triangle_3x3_0.01	3	9	0.24	0.01	Poza triangular	0.03	0.03
24	triangle_2x2_0.02	3	9	0.24	0.02	Poza triangular	0.02	0.02
25	triangle_2x3_0.02	3	9	0.24	0.02	Poza triangular	0.02	0.03
26	triangle_3x2_0.02	3	9	0.24	0.02	Poza triangular	0.03	0.02
27	triangle_3x3_0.02	3	9	0.24	0.02	Poza triangular	0.03	0.03
28	triangle_2x2_0.03	3	9	0.24	0.03	Poza triangular	0.02	0.02
29	triangle_2x3_0.03	3	9	0.24	0.03	Poza triangular	0.02	0.03
30	triangle_3x2_0.03	3	9	0.24	0.03	Poza triangular	0.03	0.02
31	triangle_3x3_0.03	3	9	0.24	0.03	Poza triangular	0.03	0.03

Nota: Elaboración propia

Figura 66
Configuración geométrica de los escenarios simulados



Nota: Elaboración propia

3. MODELAMIENTO COMPUTACIONAL

3.1. Métodos de Solución

Se ha escogido para la simulación computacional del problema aplicar el método Volumen de Fluido a través del programa de código abierto OpenFOAM desarrollado por Jasak (2009), utilizando específicamente el solucionador “InterFOAM”, ya que permite resolver las ecuaciones del movimiento para fluidos multifásicos (agua y aire) inmiscibles, incompresibles, isotérmicos, turbulentos, y de flujo transitorio. La elección de OpenFOAM se dio fundamentalmente por ser de código abierto, ya que permite al usuario tener control total sobre todos los parámetros necesarios para la ejecución del modelo.

3.1.1 Recursos Computacionales

Las simulaciones se ejecutarán en un ordenador con las especificaciones siguientes:

Procesador:	AMD Ryzen 9 7900 – 12 núcleos
Tarjeta de Video:	Radeon Rx 570 4gb Gddr5 192bit
Memoria Ram:	32GB, DDR5, 4800 MHz

3.1.2 Paralelización

La paralelización del procesamiento del modelo es un paso muy importante ya que permite utilizar todos los núcleos del procesador de manera simultánea. Para lograr esto, el dominio se descompone en el número de procesadores disponibles. Primero, se define el archivo decomposeParDict en la carpeta system de cada caso a evaluar. En este archivo se define el número de subdominios que se generaran y el método de división que se utilizara. Es así que, para las simulaciones se definieron 12 subdominio y un método de discretización “hierarchical” el cual permite definir el eje sobre el cual se dividirán lo subdominio, el que en nuestro caso es el eje X, por ser el eje principal de las geometrías modeladas, los parámetros utilizados se muestran en Tabla 19.

Tabla 19
Parámetros del fichero decomposeParDict

Parámetro	Valor
numberOfSubdomains	12
Method	hierarchical
hierarchicalCoeffs	n (12 1 1) delta 0.001 xyz;

Nota: Elaboración propia

La ejecución de esta utilidad es mediante el comando *decomposePar* el cual se debe aplicar una vez todas las demás variables del caso estén definidas, este comando creará subcarpetas de cada subdominio. Una vez dividido el caso, se ejecuta la simulación en paralelo según el comando:

mpirun -np 12 interFoam -parallel > log.name &

Los resultados al igual que el caso descompuesto son guardados en la carpeta de cada subdominio. Por lo tanto, el caso tiene que volver a ser unido en todas las instancias de tiempo creadas mediante el comando *reconstructPar*.

3.1.3 Método de volúmenes finitos

Se ha elegido el método de volúmenes finitos para la simulación, además, se ha optado por el submétodo “Volumen de fluido” el cual permite simular flujos de superficie libre como es el caso de la presente investigación. Por lo tanto, se define el uso del solucionador *interFoam* para simular dos fluidos (agua y aire) incompresibles, inmiscibles e isotermales capturando la interfaz de contacto entre ellos mediante la representación de una fracción de fase (*alpha.water*) propio del método de volumen de fluido.

3.1.3.1. Modelo de turbulencia

Se han probado tres modelos de turbulencia; $k - \epsilon$, $k - \omega$ y *SST* $k - \omega$, la comparación gráfica de los resultados con respecto a los datos experimentales se muestra en la Figura 67. Además, a partir de la comparación estadística de los resultados experimentales con los de cada simulación se pudo concluir que el modelo *SST* $k - \omega$ es el que mejores valores de error medio absoluto (MAE) y error medio cuadrático (RMSE) como se muestra en la Tabla 20. Por otro lado, el modelo *SST* $k - \omega$ presenta un coeficiente de correlación alto con respecto a los datos experimentales. Finalmente, de acuerdo a la literatura este modelo es más robusto para flujos con gradientes fuertes, separación de flujo y para flujos de superficie libre como lo es el problema a simular.

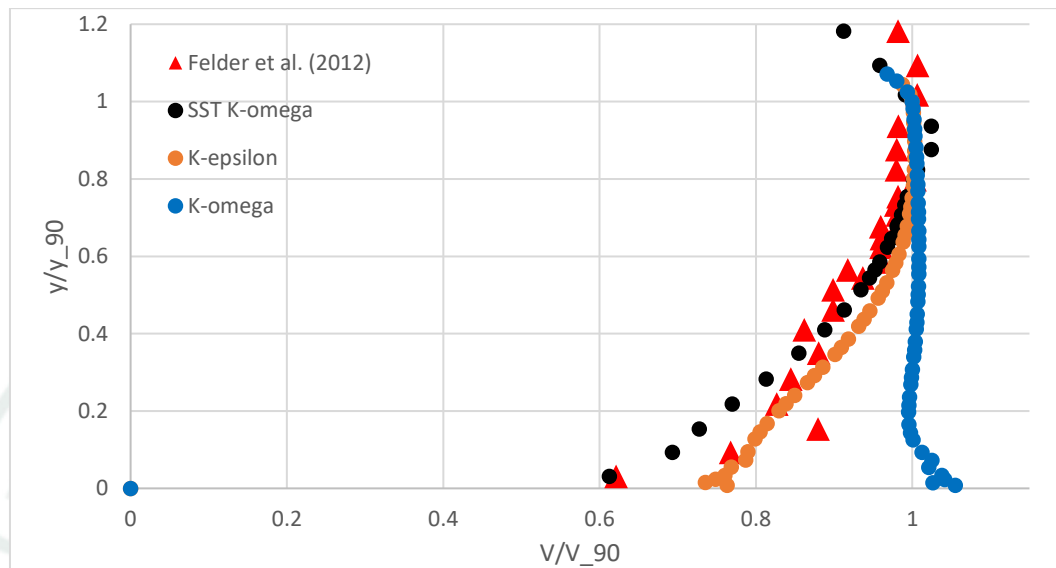
Tabla 20
Indicadores estadísticos para cada modelo de turbulencia.

	<i>SST</i> $k - \omega$	$k - \epsilon$	$k - \omega$
MAE	0.0304	0.0337	0.4224
RMSE	0.0438	0.0439	0.4826
COEF. CORR.	0.9211	0.9278	-0.2936

Nota: Elaboración propia

Figura 67

Comparación de datos experimentales con respecto a simulaciones de distintos modelos de turbulencia



Nota: Elaboración propia

3.1.3.2. Esquemas de discretización

Se definen en el archivo fvSchemes ubicado en la carpeta system de cada directorio, es definido según la instancia del modelamiento empezando por los esquemas más estables y terminando con los esquemas más precisos. Se debe definir el tipo de esquema de discretización que se debe utilizar según el tipo de termino que se encuentre en las ecuaciones a resolver, la Tabla 21 describe las opciones para cada uno y los criterios para su utilización.

Tabla 21
Parámetros para los esquemas de discretización

Termino a discretizar	Parámetro	Valor		Criterio
Derivadas temporales	ddtSchemes	default	Euler;	Estabilidad Precisión
		default	backward;	
Interpolación	interpolationSchemes	default	Upwind;	Estabilidad Precisión
		default	linearUpwind;	
		default	limitedLinear 1;	
		default	vanLeer;	
		default	Linear;	
Gradientes	gradSchemes	default	Gauss linear;	Estabilidad Precisión
		default	leastSquares;	
Divergencia	divSchemes	div(rhoPhi,U) div(phi,alpha) div(phirb,alpha) div(phi,k) div(phi,omega) div((((rho*nuEff)*dev2(T(grad(U))))))	Gauss upwind; Gauss vanLeer; Gauss linear; Gauss upwind; Gauss upwind; Gauss linear;	Estabilidad Precisión
		div(rhoPhi,U) div(phi,alpha) div(phirb,alpha) div(phi,k) div(phi,omega) div((((rho*nuEff)*dev2(T(grad(U))))))	Gauss linearUpwind grad(U); Gauss vanLeer; Gauss linear; Gauss linearUpwind grad(k); Gauss linearUpwind grad(omega); Gauss linear;	
		div(rhoPhi,U) div(phi,alpha) div(phirb,alpha) div(phi,k) div(phi,omega) div((((rho*nuEff)*dev2(T(grad(U))))))	Gauss limitedLinearV 1; Gauss vanLeer; Gauss linear; Gauss limitedLinear 1; Gauss limitedLinear 1; Gauss linear;	
Producto punto	snGradSchemes	default	orthogonal;	Ortogonal No ortogonal
		default	uncorrected;	
		default	corrected;	
		default	limited 1;	
Laplaciano	laplacianSchemes	default	Gauss linear orthogonal;	Usa producto punto
Distancia a muro	wallDist	method	meshWave;	$SST\ k - \omega$

Nota: Elaboración propia

3.1.3.3. Métodos de solución

Se definen en el archivo fvSolution ubicado en la carpeta system de cada directorio. Se definen para cada variable, definiendo que método iterativo, sus tolerancias y que suavizador se utilizara en caso sea posible. Por lo tanto, la Tabla 22 muestras los valores utilizados para las simulaciones.

Tabla 22
Parámetros del fichero fvSolution

Variable	Parámetro	Valor
alpha.water	nAlphaCorr	1;
	nAlphaSubCycles	1;
	cAlpha	1;
p_rgh	MULESCorr	yes;
	nLimiterIter	3;
	solver	smoothSolver;
	tolerance	symGaussSeidel;
pcorr.	relTol	1e-8;
	solver	0;
	tolerance	GAMG;
	relTol	1e-9
	smoother	0.01;
p_rghFinal	maxIter	GaussSeidel;
	solver	50;
	tolerance	PCG;
	relTol	1e-5;
	maxIter	0;
U k omega	preconditioner	50;
	tolerance	GAMG;
	relTol	1e-5;
	smoother	0;
U k omega	nSweeps	GaussSeidel;
	solver	1;
	tolerance	smoothSolver;
	relTol	1e-9
	smoother	0.1

Nota: Elaboración propia

El algoritmo de solución se define como PIMPLE y los parámetros utilizados se definen en la Tabla 23. Adicionalmente, se precisa que al definir nOuterCorrectors como 1, estaría trabajando como un algoritmo PISO. Este último es adecuado para flujos incompresibles no permanentes, considerando pasos temporales pequeños ($Co < 1$). Además, realizar un solo momentumPredictor y dos nCorrectors es suficiente para llegar a la convergencia.

Similarmente, no es necesario relajar las ecuaciones ya que los pasos temporales pequeños implican una fuerte dominancia diagonal de las matrices.

Tabla 23

Parámetros del algoritmo de solución

Algoritmo	Parámetro	Valor	Criterios
PIMPLE	nOuterCorrectors	1;	Funciona como PISO
	momentumPredictor	yes;	Activar para flujos de alta velocidad dominados por el intercambio de momento lineal
	nCorrectors	2;	Utilizar 2 en la solución inicial y 3 o 4 para solución final
	nNonOrthogonalCorrectors	1;	Agregar según qué tan mala sea la malla
	relaxationFactors	1;	No es necesario para flujos no permanentes

Nota: Elaboración propia

3.2. Construcción de la Geometría

La construcción de la geometría empieza por generar el modelo tridimensional del vertedero de la represa Coltani a partir de los planos del expediente técnico. Este modelo permitirá obtener las coordenadas de los vértices necesarios para la elaboración de la malla computacional, tanto del modelo original como de sus variantes. Es así que, para la elaboración de las mallas computacionales que representen los diferentes escenarios geométricos propuestos se utilizará el programa Blender 3.4, el cual ha sido elegido ya que es de código abierto y es muy versátil en la generación de geometrías 3D, las cuales en conjunto con la utilidad blockMesh y snappyHexMesh incluida en OpenFOAM, permitirán recrear los escenarios geométricos a simular.

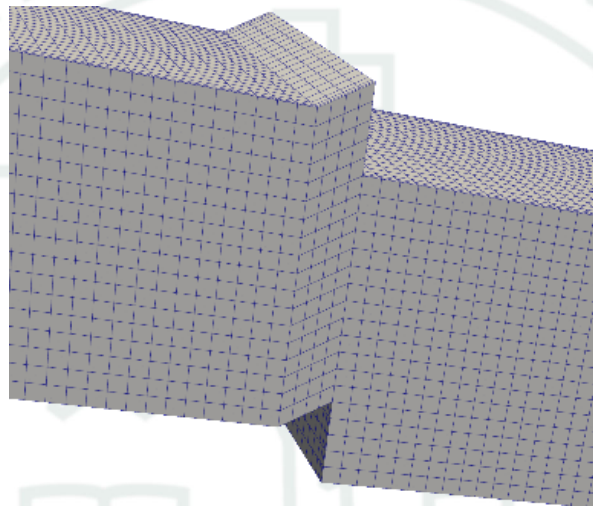
3.2.1 Mallado Computacional

Se ha definido un procedimiento uniformizado que permita generar mallas computacionales tridimensionales de óptima calidad para todos los modelos ejecutados. Para esto, se tomó la decisión de elaborar mallas estructuras con la utilidad blockMesh y no con la utilidad castellatedMeshControls de snappyHexMesh, la que si bien es más rápida no otorga tanto control sobre todo en la definición precisa de los límites exteriores.

En general, la malla se elabora en dos instancias; primero, como se muestra en la Figura 68, mediante el uso de la utilidad blockMesh se genera una malla primigenia sobre la cual se correrá un modelo preliminar que permita obtener condiciones iniciales del flujo de superficie libre. Seguidamente, como se muestra en la Figura 69, mediante la utilidad addLayers de snappyHexMesh se refina la malla sobre todo en las zonas próximas a las paredes, obteniendo la malla final la cual permitirá una simulación coherente con la realidad.

Figura 68

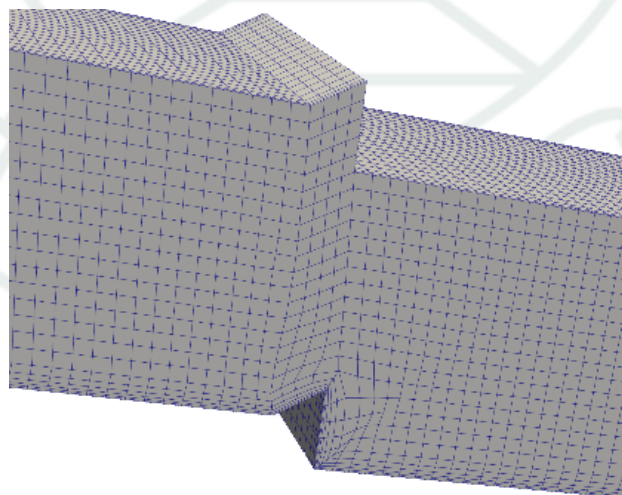
Malla inicial sin refinamiento en paredes



Nota: Elaboración propia

Figura 69

Malla inicial con refinamiento en paredes



Nota: Elaboración propia

3.2.2 Superficies de frontera

Los límites geométricos de la simulación están definidos por los elementos definidos en el directorio “boundary” sobre los cuales se definirán las condiciones de frontera, según las definiciones de openFoam podemos tener diferentes tipos de frontera, sin embargo, por la naturaleza del estudio se utilizaron tres: frontera tipo patch, es de tipo neutro no impone física por si mismo si no a partir de las condiciones de contorno (entrada, salida o atmosfera); frontera tipo wall, para delimitar paredes reales sobre las cuales se deban aplicar funciones de muro; frontera tipo processor, cuando el dominio computacional es dividido para ser calculado por varios procesadores en paralelo, este patch permite la comunicación entre estos subdominios. De acuerdo a lo mencionado, en este trabajo se ha definido cinco fronteras diferentes, por lo tanto, de acuerdo a su naturaleza física se le asigna un tipo de frontera según se describe en la Tabla 24.

Tabla 24
Definición de las superficies de frontera

Descripción	Nombre del limite	Tipo
Entrada de agua	inlet	patch
Salida de agua	outlet	patch
Pared inferior de los canales	bottom	wall
Pared lateral de los canales y todas las paredes del canal de aproximación y del vertedero lateral	defaultFaces	wall
Superficie libre en contacto con la atmosfera	atmosphere	patch

Nota: Elaboración propia

3.2.3 Campo interno

Para cada caso de estudio se ha obtenido una malla final, que han sido evaluados bajo diversos criterios de calidad de malla, estos se detallan en la Tabla 25 y son:

- Relación de aspecto
- No ortogonalidad
- Distorsión de celda
- Tamaño de celda

Tabla 25

Parámetros de las mallas generadas para cada caso simulado

Caso	Cells	Max Aspect Ratio	NonOrthoMax	NonOrthoAvg	SevereFaces	MaxSkew	Average Side
total_7	1239136	43.7	72.7	11.7	2016	2.2	0.00807
escalones_1	1038962	31.0	71.5	10.4	168	2.2	0.008558
escalones_2	1040258	22.0	71.5	10.4	168	2.5	0.008554
escalones_3	1041554	17.8	71.5	10.4	168	2.6	0.008551
escalones_4	1040402	31.2	71.5	10.5	168	2.3	0.008554
escalones_5	1043138	22.1	71.5	10.5	168	2.6	0.008546
escalones_6	1045874	17.8	71.5	10.5	168	2.9	0.008539
pooled_2x2_0.01_refined	1190258	29.6	71.5	10.4	168	3.6	0.008668
pooled_2x3_0.01_refined	1209722	30.2	71.5	10.5	168	3.6	0.008681
pooled_3x2_0.01_refined	1226258	29.5	71.5	10.5	168	3.6	0.008716
pooled_3x3_0.01_refined	1232522	29.8	71.5	10.6	168	3.6	0.008699
pooled_2x2_0.02_refined	1205042	29.3	71.5	10.4	168	3.5	0.008693
pooled_2x3_0.02_refined	1290626	23.0	71.5	10.3	168	3.6	0.008742
pooled_3x2_0.02_refined	1227554	29.5	71.5	10.4	168	3.6	0.008713
pooled_3x3_0.02_refined	1233818	28.5	71.5	10.5	168	3.6	0.008696
pooled_2x2_0.03_refined	1229138	29.3	71.5	10.3	168	3.4	0.00871
pooled_2x3_0.03_refined	1291922	23.0	71.5	10.2	168	3.5	0.008739
pooled_3x2_0.03_refined	1228850	29.5	71.5	10.3	168	3.5	0.00871
pooled_3x3_0.03_refined	1235114	23.0	71.5	10.4	168	3.5	0.008693
triangle_2x2_0.01_refined	1207394	22.5	71.5	10.9	168	5.1	0.008765
triangle_2x3_0.01_refined	1208570	22.0	71.5	11.3	168	6.9	0.008687
triangle_3x2_0.01_refined	1225826	22.2	71.5	10.6	168	3.9	0.008721
triangle_3x3_0.01_refined	1231730	18.2	71.5	10.9	168	5.2	0.008707
triangle_2x2_0.02_refined	1208930	20.1	71.5	10.7	168	5.0	0.008687
triangle_2x3_0.02_refined	1289546	20.0	71.5	11.2	168	6.8	0.008748
triangle_3x2_0.02_refined	1230794	18.1	71.5	10.4	168	3.9	0.008709
triangle_3x3_0.02_refined	1233026	18.1	71.5	10.8	168	5.2	0.008704
triangle_2x2_0.03_refined	1233026	20.0	71.5	10.7	168	5.0	0.008704
triangle_2x3_0.03_refined	1290842	20.0	71.5	11.1	168	6.8	0.008745
triangle_3x2_0.03_refined	1233026	18.0	71.5	10.3	168	3.9	0.008704
triangle_3x3_0.03_refined	1234322	18.1	71.5	10.6	168	5.2	0.008701

Nota: Elaboración propia

3.3. Propiedades Hidráulicas

Para todos los casos propuestos en la sección Escenarios Planteados se han definido las mismas condiciones hidráulicas iniciales tanto internas como de frontera, ya que obedecen al mismo escenario de entrada y salida para la avenida extraordinaria milenaria. Es así que, para el campo interno así como para todas las superficies de frontera definidas en la sección anterior, se definen condiciones iniciales de todas las variables necesarias para la simulación e.g. U (velocidad), p_{rgh} (presión modificada), k (energía cinética turbulenta), ω (tasa específica de disipación), ν_{t} (viscosidad cinética turbulenta) y α_{water} (fracción volumétrica de agua).

3.3.1 Velocidad

En el tiempo 0 de simulación el dominio comienza completamente vacío, por lo que la definición de U en la frontera inlet es fundamental para el ingreso de agua al dominio. Por lo tanto, de acuerdo a la sección Hidrología del CAPITULO IV: CASO DE ESTUDIO – VERTEDERO DE LA REPRESA DE COLTANI, el caudal de entrada a utilizar es $Q_{prototipo} = 5 \text{ m}^3/\text{s}$ el que corresponde a un caudal del modelo de $Q_{modelo} = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$. Además, las otras fronteras también requieren definir sus condiciones de frontera con respecto a la velocidad, las que se detallan en la Tabla 26.

Tabla 26
Definición de los parámetros del fichero U

U		Definición	Descripción
internalField		uniform 0;	Velocidad inicial 0 en todas las celdas
boundaryField	inlet	type flowRateInletVelocity; volumetricFlowRate constant 0.015811388;	Define la velocidad a partir de un caudal de entrada constante
	outlet	type zeroGradient;	Permite que la velocidad se desarrolle libremente, no permite reflejos artificiales
	bottom	type noSlip;	Impone una velocidad nula del agua en contacto con la pared, genera la capa límite
	defaultFaces	type noSlip;	
	atmosphere	type pressureInletOutletVelocity; value uniform (0 0 0)	Permite entrada y salida de flujo de acuerdo al campo de presiones

Nota 1: unidades m/s ,

Nota 2: Elaboración propia

3.3.2 Presión modificada

Se denomina presión modificada ya que es la presión corregida por la hidrostática, es decir que no incluye la presión estática (ρgh), de la misma manera en la Tabla 27 se definen las condiciones de frontera utilizadas.

Tabla 27

Definición de los parámetros del fichero P

p		Definición	Descripción
internalField		uniform 0;	Presión inicial de 0 en todas las celdas
boundaryField	inlet	type fixedFluxPressure; value uniform 0;	Establece un gradiente de presión libre, definido por el campo de velocidades.
	outlet	type fixedFluxPressure; value uniform 0;	
	bottom	type fixedFluxPressure; value uniform 0;	
	defaultFaces	type fixedFluxPressure; value uniform 0;	
	atmosphere	totalPressure; uniform 0; uniform 0;	Establece una presión atmosférica constante y permite entrada y salida de flujo.

Nota 1: unidades $kg/m/s^2 = N/m^2 = Pa$

Nota 2: Elaboración propia

3.3.3 Energía cinética turbulenta

Es la energía cinética promedio por unidad de masa proveniente de los remolinos en un flujo turbulento, se calcula a partir de la media cuadrática de la fluctuación de las velocidades. Las condiciones de frontera se definen en la Tabla 28.

Tabla 28

Definición de los parámetros del fichero k

k		Definición	Descripción
internalField		uniform 0.0001;	Valor inicial en todo el dominio, bajo nivel de turbulencia que no define la solución final
boundaryField	inlet	type fixedValue; intensity 0.05; value \$internalField;	Fija el valor igual al del campo interno como estimación inicial. Define 5% de intensidad turbulenta para el caudal entrante.
	outlet	type inletOutlet; inletValue \$internalField; value \$internalField;	Establece una condición mixta, si el flujo sale aplica un gradiente nulo que permite liberar la cantidad. Si el flujo ingresa utiliza el valor de internalField
	bottom	type kqRWallFunction; value uniform 0.01;	Utiliza funciones de pared para calcular el valor de k evitando resolver la subcapa viscosa directamente
	defaultFaces	type kqRWallFunction; value uniform 0.01;	
	atmosphere	type inletOutlet; inletValue \$internalField; value \$internalField;	Igual que para el outlet, permite entrada y salida de la cantidad

Nota: unidades m^2/s^2

Nota: Elaboración propia

3.3.4 Tasa específica de disipación de turbulencia

Es la tasa con la que la energía cinética turbulenta se disipa. La Tabla 29 describe los valores utilizados para simular esta propiedad.

Tabla 29Definición de los parámetros del fichero ω

ω		Definición	Descripción
internalField		internalField uniform 0.003;	Valor inicial en todo el dominio, bajo nivel de disipación que no define la solución final
boundaryField	inlet	type fixedValue; value \$internalField;	Fija el valor igual al del campo interno como estimación inicial
	outlet	type inletOutlet; inletValue \$internalField; value \$internalField;	Establece una condición mixta, si el flujo sale aplica un gradiente nulo que permite liberar la cantidad. Si el flujo ingresa utiliza el valor de internalField
	bottom	type omegaWallFunction; value \$internalField;	Utiliza funciones de pared para calcular el valor de ω evitando resolver la subcapa viscosa directamente
	defaultFaces	type omegaWallFunction; value \$internalField;	
	atmosphere	type inletOutlet; inletValue \$internalField; value \$internalField;	Igual que para el outlet, permite entrada y salida de la cantidad

Nota 1: unidades 1/s

Nota 2: Elaboración propia

3.3.5 Viscosidad cinética turbulenta

Al usar un modelo $k - \omega SST$ utiliza para a las regiones cercanas a las paredes un comportamiento $k - \omega$, mientras que para las zonas lejanas utiliza un comportamiento $k - \epsilon$. La Tabla 30 muestra los valores utilizados para definir la viscosidad cinética turbulente.

Tabla 30

Definición de los parámetros del fichero ν_t

ν_t		Definición	Descripción
internalField		internalField uniform 0;	Valor inicial para iniciar la simulación
boundaryField	inlet	type calculated; value uniform 0;	Calcula su valor según el modelo de turbulencia utilizado
	outlet	type calculated; value uniform 0;	Calcula su valor según el modelo de turbulencia utilizado
	bottom	type nutkWallFunction; value uniform 0;	No calcula directamente ν_t , si no que al estar dentro de la capa viscosa lo calcula a partir de k y la distancia a la pared
	defaultFaces	type nutkWallFunction; value uniform 0;	
	atmosphere	type calculated; value uniform 0;	Calcula su valor según el modelo de turbulencia utilizado

Nota: unidades m^2/s

Nota 2: Elaboración propia

3.3.6 Fracción volumétrica de agua

Es un campo adimensional que representa la proporción entre el agua y el volumen de la celda. Es decir, toma el valor de 1 cuando la celda está completamente ocupada por agua y de 0 cuando está ocupada completamente por aire. La Tabla 31 describe los parámetros utilizados para definir los valores de alpha.water.

Tabla 31

Definición de los parámetros del fichero alpha.water

alpha.water		Definición	Descripción
internalField		uniform 0;	Valor inicial de toda la malla interna igual a cero, es decir el dominio empieza vacío.
boundaryField	inlet	type fixedValue; value uniform 1;	Fija un valor de 1, indicando agua entrando
	outlet	zeroGradient;	Flujo libre de la variable, calculado a partir del campo interior
	bottom	zeroGradient;	Flujo libre de la variable, calculado a partir del campo interior
	defaultFaces	zeroGradient;	
	atmosphere	type inletOutlet; inletValue uniform 0; value uniform 0;	Si el flujo sale impone un gradiente nulo dejando salir libremente, si ingresa fija el valor de inletValue

Nota 1: unidades m^3/m^3

Nota 2: Elaboración propia

4. VALIDACIÓN Y VERIFICACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Validación experimental

A partir de la información experimental obtenida por Felder et al. (2012) se realizó una comparación con respecto a los resultados de los modelos computacionales, permitiendo definir la mejor configuración con respecto al mallado computacional, el modelo de turbulencia, los esquemas de discretización y los parámetros de solución a utilizar. Este proceso valida que el modelo computacional a utilizar sea coherente con el comportamiento físico de un flujo a través de un vertedero escalonado.

4.1.1 Geometría

El modelo experimental de Felder et al. (2012) fue ejecutado en la University of Queensland, donde se utilizó un vertedero de 26.6° el que se muestra en la **Figura 70**. Además, el vertedero consiste de una cresta de 1 metro, seguida de 10 escalones de 20 cm de paso y 10 cm de contrapaso. El ancho del canal es de 52 cm y los escalones fueron fabricados con plywood y las paredes de los canales de perspex.

Figura 70

Modelo experimental de Felder et al. (2012)



Nota: Extraído de Felder et al. (2012)

4.1.2 Parámetros hidráulicos

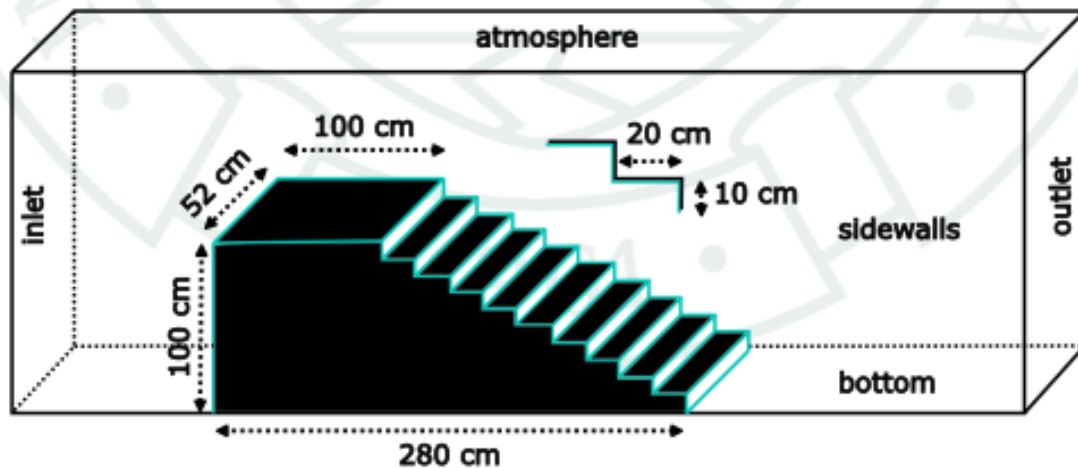
Los parámetros hidráulicos que definen el modelo físico y computacional fueron los generados para un caudal de entrada de $Q = 0.113 \text{ m}^3/\text{s}$. Es así que se realiza la validación utilizando los datos experimentales de la variación de la velocidad adimensional del flujo (V/V_{90}) con respecto al tirante adimensional (y/y_{90}) en el último escalón y comparándolos con los resultados de la simulación computacional. Donde V es la velocidad interfacial y V_{90} es la velocidad interfacial característica donde la fracción vacía alcanza el 90% del volumen, de la misma manera y es la distancia normal al lecho del canal, y_{90} es el tirante característico donde la fracción vacía es del 90%.

4.1.3 Mallado computacional

El modelo físico ha sido construido computacionalmente partiendo de una grilla de 0.25 cm para la zona de intereses y de 1 cm para el resto, generada por blockMesh, la cual es moldeada a la superficie del modelo físico mediante snappyHexMesh con el soporte de un archivo de estereolitografía generado por el software Blender que contiene las características geométricas de superficies de frontera del modelo final, como se aprecia en la Figura 71. Finalmente, se agregaron 4 capas con un factor de expansión 1.2 para garantizar valores de y^+ dentro de los rangos correctos, el modelo final de la malla se muestra en la Figura 72. Los controles de calidad de la malla se muestran en la Tabla 32.

Figura 71

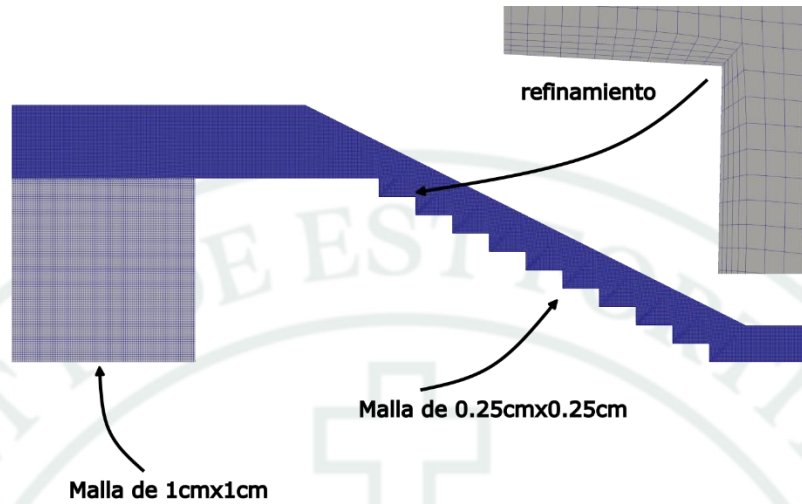
Dimensiones del modelo computacional y superficies de frontera del modelo de validación



Nota: Elaboración propia

Figura 72

Mallado computacional del modelo de validación



Nota: Elaboración propia

Tabla 32

Parámetros geométricos de la malla del modelo de validación

Caso	Cells	Max Aspect Ratio	NonOrthoMax	NonOrthoAvg	SevereFaces	MaxSkew	Average Side
try8	230480	7.5	46-88	2.43	0	2.6	0.017

Nota: Elaboración propia

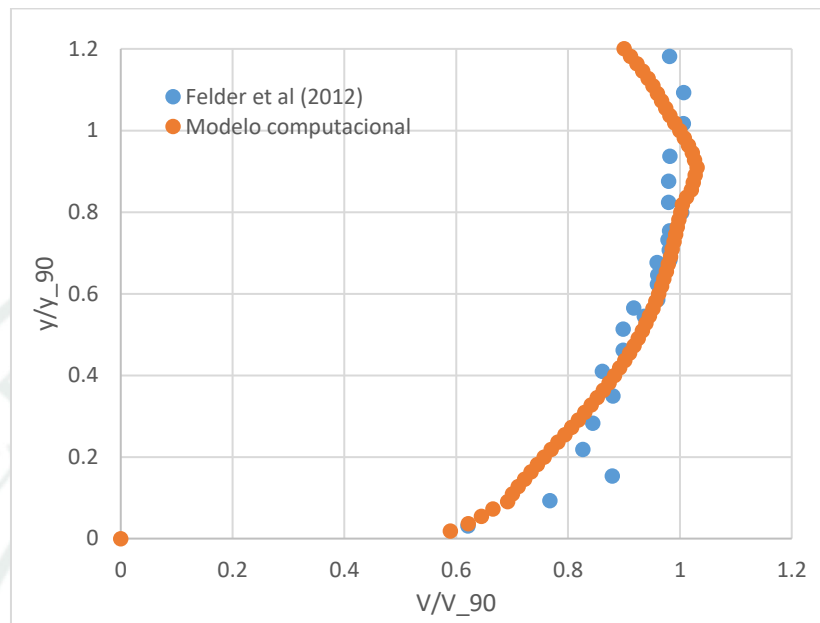
4.1.4 Comparación de los resultados

El modelo numérico final fue validado con respecto a los datos experimentales de Felder et al. (2012), quien mediante la utilización de sondas intrusiva de detección de fase de doble punta permitió obtener a partir del procesamiento de la información cruda los datos de fracción de agua, tasa de conteo de burbujas, velocidad interfacial, la intensidad de turbulencia y el tamaño de cuerda de las gotas de agua y burbujas de aire.

Con esta información numérica y experimental, se ha trazado la Figura 73 que muestra la variación del flujo de velocidad adimensional (V/V_{90}) con respecto al tirante adimensional (y/y_{90}) medido de forma perpendicular al lecho del canal a la altura del último escalón. Además, la comparación numérica se realizó interpolando los datos del modelo computacional en los mismos valores de la curva experimental, a partir de esto se determinó el un coeficiente de correlación de Pearson de 0.92, un error medio absoluto el cual fue de 0.03 y el error medio cuadrático con un valor de 0.04. Por lo tanto, se muestra que hay similitud entre las dos curvas, encontrándose las mayores diferencias en la zona de mayor gradiente y cerca de la superficie libre.

Figura 73

Comparación de los resultados experimentales y computacionales



Nota: Elaboración propia.

4.2. Análisis de sensibilidad de malla

El análisis de sensibilidad de malla es muy importante ya que la densidad del mallado tiene un efecto muy significativo sobre los resultados. Por lo tanto, se debe determinar el tamaño mínimo de malla que permita obtener una independencia de los resultados y que permita alcanzar la solución en un tiempo razonable, considerando la potencia computacional disponible.

Es así que se ha realizado el análisis de sensibilidad de malla considerando tres mallas con celdas de distintos tamaños. Seguidamente, se realizó las simulaciones en cada una de las mallas según la Tabla 33, obteniendo los resultados de la Figura 74 y la Figura 75 para un punto de prueba del dominio. Finalmente, de la inspección visual y el análisis se puede establecer que la malla media y fina generan una convergencia similar en la velocidad. Visto lo anterior, se eligió la malla fina para resolver todas las simulaciones propuestas.

Tabla 33

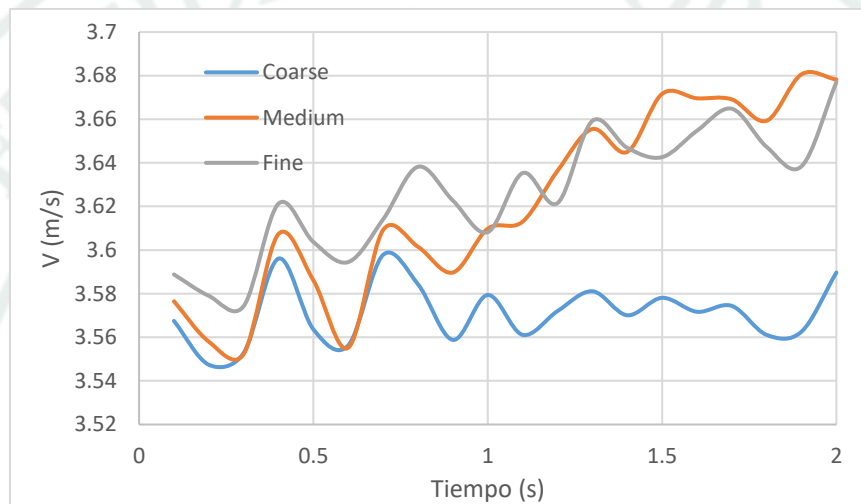
Datos estadísticos del análisis de sensibilidad de malla

Nombre	Arista media (cm)	Variación (%)
Fina	1	0.15 %
Media	1.2	1.34 %
Gruesa	1.4	

Nota: Elaboración propia.

Figura 74

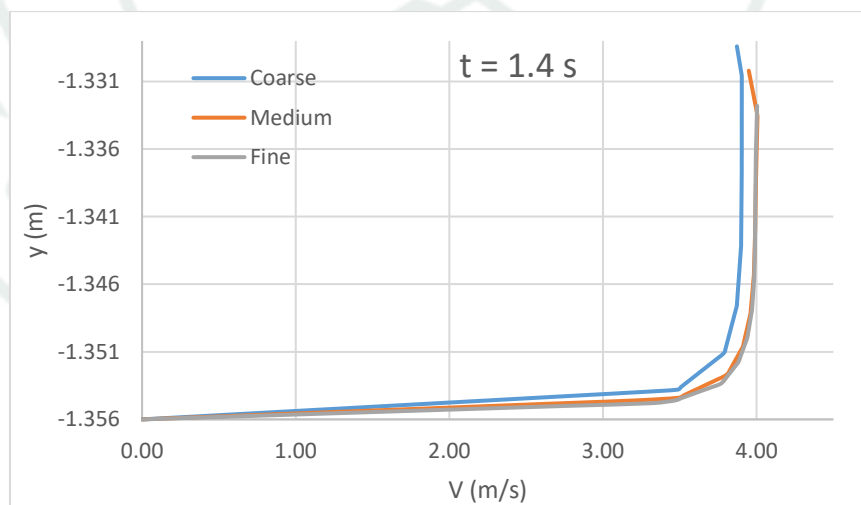
Variación temporal de la velocidad para diferentes tamaños de malla.



Nota: Elaboración propia.

Figura 75

Variación del perfil de velocidad para diferentes tipos de malla



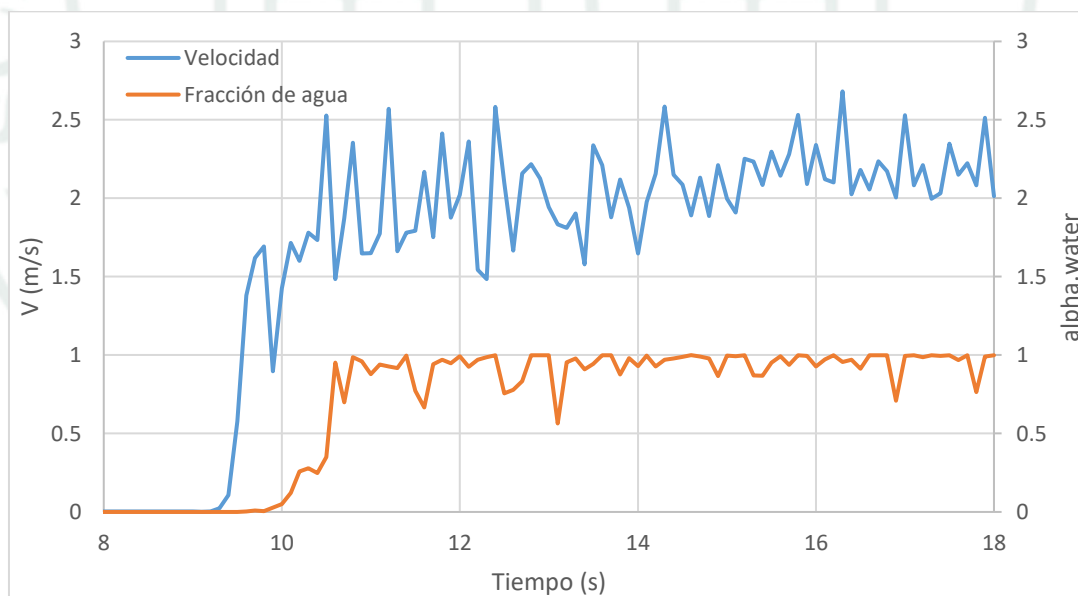
Nota: Elaboración propia.

4.3. Consistencia temporal

La consistencia temporal para los flujos transitorios estudiados se puede determinar a partir del análisis de la evolución de una variable de control. Por lo tanto, las simulaciones se consideran resueltas una vez que las variables alcancen un régimen estadísticamente estacionario. Es así que, para flujos transitorios, la convergencia de la solución no está definida por un valor constante, sino más bien por valores que oscilen alrededor de valores medios estables. Por ejemplo, en la Figura 76 se muestra los valores de un punto de control dentro del dominio computacional (ubicado al final de la tercera sección en las coordenadas 11.30876, 3.43692, -1.354) a lo largo del tiempo para la simulación correspondiente al modelo “pooled_2x2_0.01”. Visualmente se puede decir que esta variable empieza a estabilizarse a partir del segundo 15 de la simulación. Además, analíticamente se establece la variación relativa de la variable con respecto al promedio móvil de los 10 anteriores pasos temporales como indicador de estabilización. Es así que la Figura 76 muestra la tendencia decreciente de esta variación relativa hasta alcanzar el régimen estadísticamente estacionario al alcanzar una variación promedio del 5%.

Figura 76

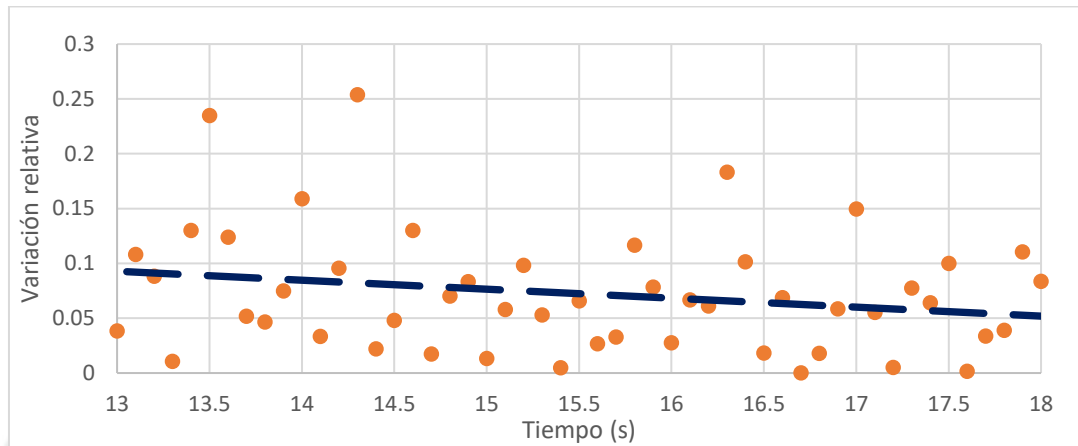
Consistencia temporal de la velocidad para un punto de control.



Nota: Elaboración propia.

Figura 77

Variación relativa de la velocidad con respecto al promedio móvil.



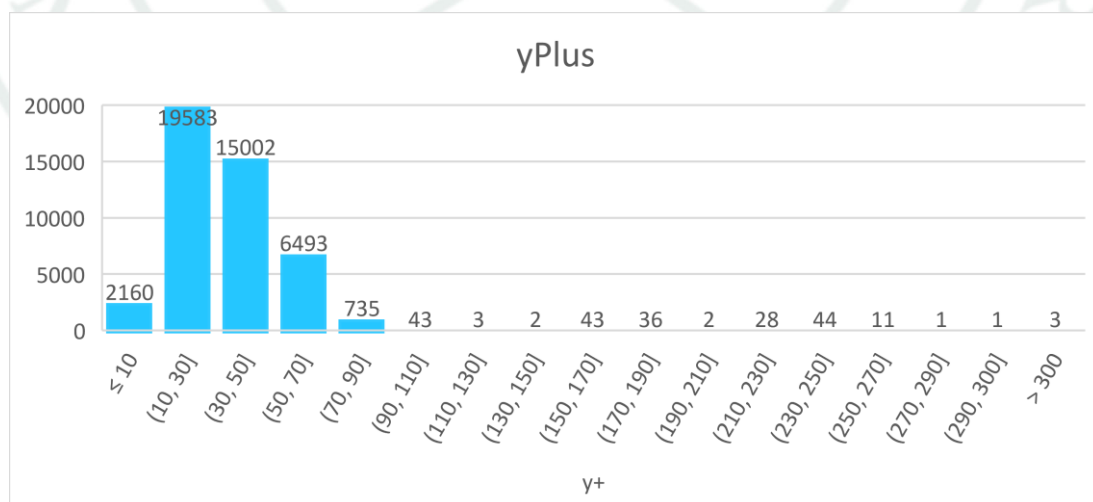
Nota: Elaboración propia.

4.4. Verificación del Parámetro y^+

Se ha verificado para todas las simulaciones que el valor de y^+ para las celdas contiguas a las superficies de tipo “wall” se mantenga dentro de límites establecidos en la sección 2.4.2 del CAPITULO II. Por ejemplo, la figura muestra el histograma de distribución de los valores de y^+ para el caso “pooled_2x2_0.01” para el segundo 17 de simulación, del cual se puede verificar que de 44,190 celdas solo 3 exceden el valor de 300 para y^+ , encontrándose la gran mayoría por debajo de 100.

Figura 78

Histograma de distribución de los valores de y^+



Nota: Elaboración propia.

CAPÍTULO VI: RESULTADOS Y DISCUSIONES

1. RESULTADOS DEL ANÁLISIS HIDRÁULICO DEL FLUJO

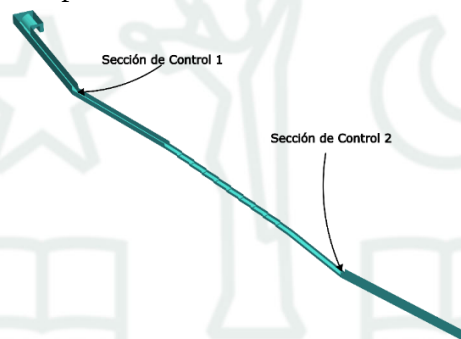
En esta sección se presentan los resultados del análisis hidráulico del flujo a través de los diferentes modelos de vertedero propuestos. Se ha procesado la información respecto a las variables: velocidad, tirante y energía, las cuales se utilizarán para evaluar el desempeño hidráulico de las diferentes estructuras estudiadas.

1.1. Resultados de la velocidad del flujo

El análisis se da entre dos secciones del vertedero, antes y después de la tercera caída como se muestra en la Figura 79. Estas secciones se definen dentro del dominio mediante una coordenada y un vector normal como se muestra en la Tabla 34.

Figura 79

Secciones de control transversal para el análisis de velocidades



Nota: Elaboración propia.

Tabla 34

Ubicación de las secciones de control en el modelo reducido.

Nombre	Coordenada	Vector Normal
Sección de control 1	(3.600 , 0.099 , -0.036)	(0.979 , 0.203 , 0.000)
Sección de control 2	(13.197 , 4.254 , -1.932)	(-0.852 , -0.523 , 0.000)

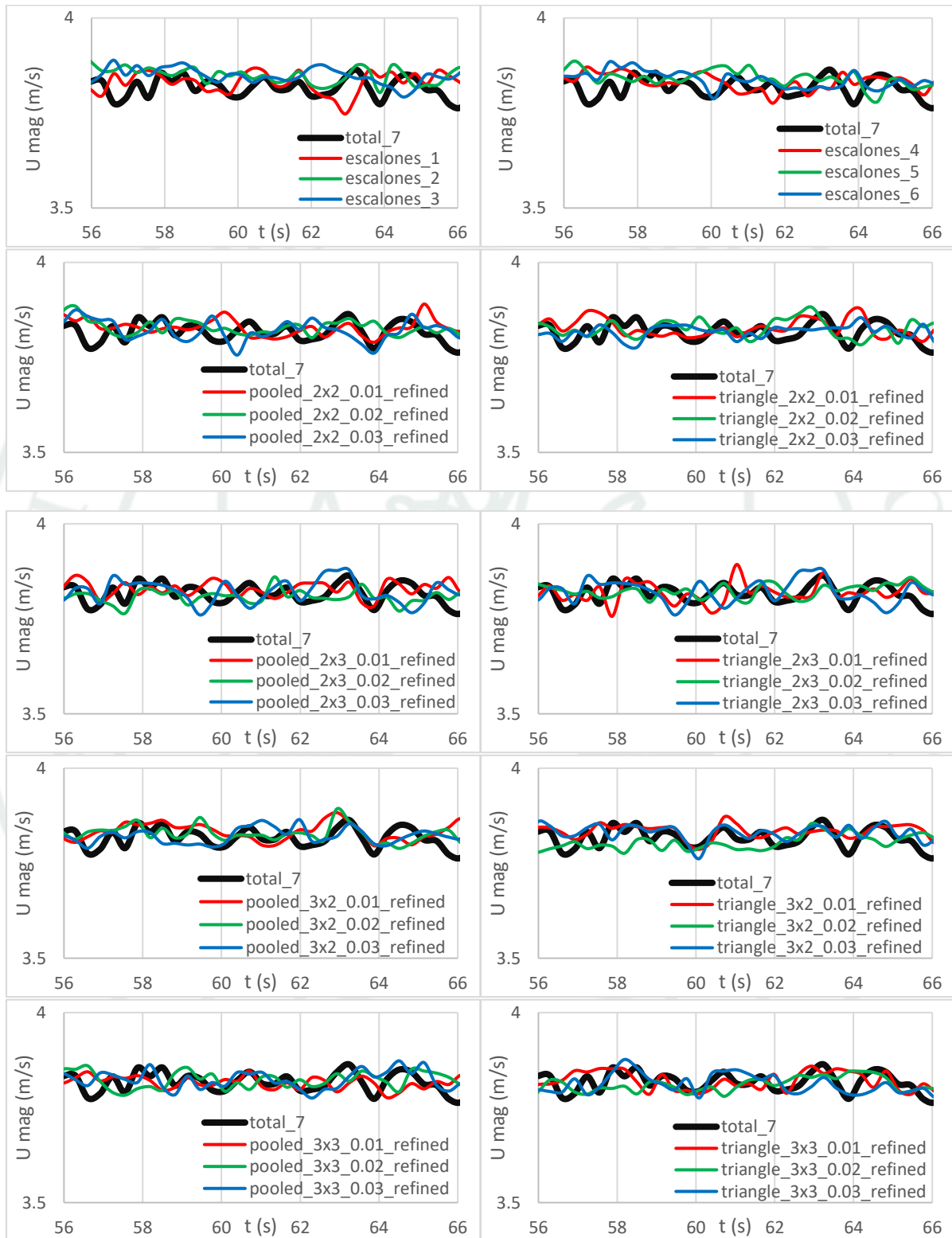
Nota: Elaboración propia.

1.1.1 Velocidad en la sección uno

Se considerará como velocidad inicial a la velocidad promedio de la sección de control 1 una vez que esta allá alcanzada estabilidad estadística. La Figura 80 muestra los valores de velocidad en la sección uno del vertedero original con respecto a todas las simulaciones ejecutadas, estos valores han sido escalados de vuelta a sus dimensiones reales, según los criterios de similitud de Froude establecidos anteriormente.

Figura 80

Estabilidad estadística de la velocidad en la sección de control 1.



Para el análisis estadístico se han tomado los últimos diez pasos temporales de cada simulación para determinar la estabilidad de los resultados. Es así que, la Tabla 35 muestra el promedio, la desviación estándar y el coeficiente de variación de cada simulación, de los cuales se interpreta que los datos presentan un coeficiente de correlación por debajo del 1%, lo que implica una altísima homogeneidad de la velocidad en la sección de control 1. Además, ya que para esta sección las condiciones de flujo son las mismas para todas las simulaciones, se espera valores similares de velocidad. Por lo tanto, la Tabla 35 también muestra el promedio y desviación estándar con respecto a los valores de velocidad de cada simulación, a partir de los cuales se determina un coeficiente de variación de 0.30 % el cual indica una buena cohesión de los datos.

Tabla 35

Valores de velocidad para los últimos diez pasos temporales en la sección de control 1

Simulación	Tiempo (s)										Prom. (m/s)	Desv. Est. (m/s)	Coef. Var. (%)
	63.6	63.9	64.2	64.5	64.8	65.1	65.5	65.8	66.1	66.4			
total_7	3.82	3.77	3.82	3.85	3.84	3.81	3.81	3.77	3.77	3.81	3.81	0.029	0.77
escalones_1	3.86	3.84	3.86	3.83	3.85	3.83	3.86	3.85	3.83	3.80	3.84	0.019	0.50
escalones_2	3.87	3.80	3.88	3.86	3.82	3.82	3.82	3.85	3.87	3.85	3.84	0.025	0.64
escalones_3	3.84	3.83	3.82	3.79	3.81	3.85	3.85	3.84	3.86	3.89	3.84	0.028	0.74
escalones_4	3.86	3.83	3.84	3.84	3.84	3.84	3.83	3.80	3.83	3.82	3.83	0.017	0.44
escalones_5	3.83	3.86	3.80	3.78	3.84	3.84	3.81	3.82	3.82	3.82	3.82	0.022	0.57
escalones_6	3.82	3.86	3.82	3.81	3.82	3.84	3.82	3.84	3.83	3.83	3.83	0.014	0.38
pooled_2x2_0.01_refined	3.81	3.79	3.82	3.83	3.83	3.89	3.84	3.83	3.82	3.85	3.83	0.027	0.70
pooled_2x2_0.02_refined	3.83	3.84	3.81	3.80	3.82	3.83	3.81	3.83	3.81	3.78	3.82	0.019	0.49
pooled_2x2_0.03_refined	3.78	3.76	3.81	3.81	3.86	3.83	3.83	3.82	3.80	3.84	3.82	0.029	0.77
pooled_2x3_0.01_refined	3.79	3.78	3.85	3.84	3.82	3.84	3.83	3.86	3.82	3.83	3.83	0.024	0.64
pooled_2x3_0.02_refined	3.84	3.80	3.81	3.77	3.80	3.80	3.82	3.80	3.82	3.80	3.81	0.018	0.49
pooled_2x3_0.03_refined	3.81	3.80	3.81	3.79	3.77	3.79	3.84	3.83	3.81	3.83	3.81	0.023	0.59
pooled_3x2_0.01_refined	3.83	3.80	3.81	3.82	3.80	3.82	3.83	3.84	3.87	3.83	3.83	0.021	0.56
pooled_3x2_0.02_refined	3.86	3.83	3.81	3.83	3.84	3.84	3.85	3.86	3.82	3.84	3.84	0.017	0.43
pooled_3x2_0.03_refined	3.83	3.80	3.80	3.81	3.83	3.83	3.83	3.82	3.82	3.85	3.82	0.017	0.44
pooled_3x3_0.01_refined	3.83	3.81	3.78	3.79	3.81	3.80	3.82	3.81	3.84	3.81	3.81	0.018	0.48
pooled_3x3_0.02_refined	3.85	3.83	3.82	3.79	3.85	3.85	3.84	3.83	3.81	3.81	3.83	0.019	0.50
pooled_3x3_0.03_refined	3.86	3.83	3.84	3.87	3.84	3.87	3.81	3.79	3.81	3.79	3.83	0.029	0.76
triangle_2x2_0.01_refined	3.81	3.87	3.88	3.81	3.80	3.82	3.81	3.79	3.83	3.82	3.82	0.028	0.72
triangle_2x2_0.02_refined	3.80	3.80	3.78	3.81	3.83	3.79	3.85	3.83	3.84	3.82	3.81	0.022	0.58
triangle_2x2_0.03_refined	3.83	3.83	3.85	3.82	3.83	3.81	3.80	3.84	3.79	3.81	3.82	0.019	0.49
triangle_2x3_0.01_refined	3.81	3.82	3.81	3.83	3.81	3.82	3.85	3.82	3.83	3.87	3.83	0.020	0.51
triangle_2x3_0.02_refined	3.82	3.83	3.84	3.82	3.84	3.84	3.86	3.83	3.82	3.82	3.83	0.013	0.34
triangle_2x3_0.03_refined	3.81	3.80	3.81	3.79	3.77	3.79	3.84	3.83	3.81	3.83	3.81	0.023	0.59
triangle_3x2_0.01_refined	3.84	3.82	3.82	3.85	3.85	3.85	3.84	3.80	3.83	3.83	3.83	0.016	0.42
triangle_3x2_0.02_refined	3.82	3.84	3.82	3.81	3.79	3.81	3.82	3.83	3.82	3.84	3.82	0.013	0.35
triangle_3x2_0.03_refined	3.82	3.85	3.82	3.84	3.86	3.82	3.84	3.80	3.81	3.83	3.83	0.019	0.50
triangle_3x3_0.01_refined	3.85	3.85	3.84	3.80	3.85	3.80	3.79	3.81	3.79	3.79	3.82	0.027	0.70
triangle_3x3_0.02_refined	3.83	3.84	3.85	3.84	3.83	3.79	3.79	3.80	3.80	3.78	3.82	0.025	0.65
triangle_3x3_0.03_refined	3.80	3.78	3.78	3.80	3.82	3.79	3.79	3.80	3.78	3.80	3.79	0.011	0.29
Globales											3.82	0.012	0.30

Nota: Elaboración propia.

1.1.2 Velocidad en la sección dos

Se considerará como velocidad final a la velocidad promedio de la sección de control 2 una vez que esta allá alcanzada estabilidad estadística. La Figura 81 muestra los valores de velocidad en la sección 2 del vertedero original con respecto a todas las simulaciones.

De la misma manera que en el apartado anterior, se han tomado los últimos diez pasos temporales de cada simulación para determinar estadísticamente la estabilidad de los resultados. Es así que, la Tabla 36 muestra el promedio, la desviación estándar y el coeficiente de variación de cada simulación. Cabe resaltar que los valores del coeficiente de variación son más grandes que en la sección uno, sin embargo, aún se encuentran por debajo del 5%, habiendo alcanzado la estabilidad estadística del modelo. Además, este aumento es esperable, debido a la turbulencia adquirida luego de transitar por las diferentes secciones escalonadas de los modelos simulados.

Tabla 36

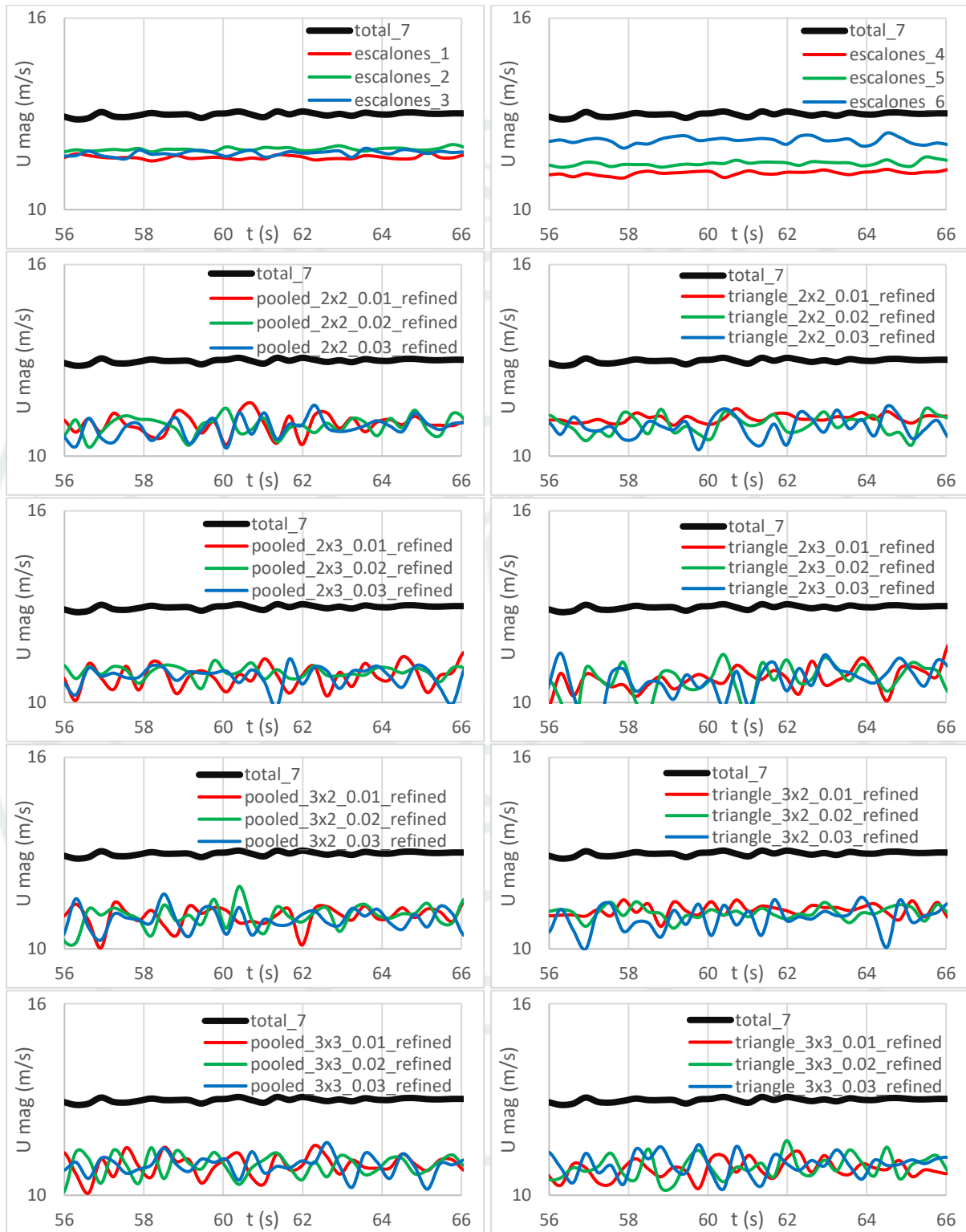
Valores de velocidad para los últimos diez pasos temporales en la sección de control 2

Simulación	Tiempo (s)										Prom. (m/s)	Desv. Est. (m/s)	Coef. Var. (%)
	63.6	63.9	64.2	64.5	64.8	65.1	65.5	65.8	66.1	66.4			
total_7	13.0	13.0	13.0	13.0	13.0	13.0	13.0	13.0	13.0	13.0	13.01	0.020	0.16
escalones_1	11.7	11.7	11.6	11.6	11.6	11.8	11.6	11.6	11.7	11.6	11.66	0.065	0.56
escalones_2	11.8	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	11.9	12.0	11.9	11.7	11.89	0.088	0.74
escalones_3	11.9	11.8	11.7	11.9	11.8	11.8	11.8	11.8	11.8	11.6	11.80	0.076	0.64
escalones_4	11.1	11.2	11.2	11.3	11.2	11.1	11.2	11.2	11.3	11.2	11.19	0.052	0.47
escalones_5	11.5	11.4	11.4	11.6	11.4	11.4	11.6	11.6	11.5	11.4	11.48	0.097	0.84
escalones_6	12.2	12.0	12.1	12.4	12.3	12.1	12.0	12.1	12.0	12.1	12.13	0.129	1.06
pooled_2x2_0.01_refined	10.8	11.1	11.1	11.0	11.2	11.0	11.0	11.0	11.1	10.8	11.00	0.143	1.30
pooled_2x2_0.02_refined	11.1	10.6	11.2	10.9	11.4	10.8	10.6	11.3	11.1	10.3	10.94	0.349	3.19
pooled_2x2_0.03_refined	10.9	11.1	10.9	10.8	11.3	11.0	10.8	11.0	11.1	11.1	11.02	0.163	1.48
pooled_2x3_0.01_refined	11.2	10.8	10.7	11.4	11.1	10.3	10.8	10.9	11.6	10.9	10.98	0.368	3.35
pooled_2x3_0.02_refined	10.9	11.1	11.1	10.9	11.1	11.0	10.6	11.1	11.1	10.6	10.94	0.177	1.62
pooled_2x3_0.03_refined	11.0	11.1	10.8	10.5	11.1	11.0	10.5	10.0	11.1	11.0	10.80	0.386	3.58
pooled_3x2_0.01_refined	11.3	10.9	11.0	11.3	11.0	11.3	11.2	10.9	11.5	11.1	11.14	0.206	1.85
pooled_3x2_0.02_refined	11.4	11.1	11.0	11.1	11.1	11.4	10.8	10.8	11.6	10.9	11.11	0.265	2.38
pooled_3x2_0.03_refined	11.0	11.2	10.8	10.6	11.1	10.7	11.3	11.1	10.4	11.1	10.94	0.298	2.72
pooled_3x3_0.01_refined	10.9	10.8	10.9	11.3	11.0	10.8	11.1	11.1	10.8	10.9	10.95	0.170	1.55
pooled_3x3_0.02_refined	10.6	10.8	11.2	11.1	10.7	10.8	11.1	11.3	10.9	11.2	10.96	0.226	2.06
pooled_3x3_0.03_refined	11.3	11.0	10.5	11.3	10.9	10.2	11.0	11.0	11.1	11.1	10.94	0.345	3.16
triangle_2x2_0.01_refined	11.2	11.4	11.2	11.4	11.2	11.0	11.2	11.3	11.3	11.3	11.24	0.104	0.93
triangle_2x2_0.02_refined	11.1	11.1	11.3	10.7	10.7	10.4	11.5	11.3	11.2	11.1	11.03	0.336	3.05
triangle_2x2_0.03_refined	10.9	11.1	10.6	11.6	11.2	10.6	10.8	11.1	10.6	11.1	10.97	0.330	3.01
triangle_2x3_0.01_refined	10.9	11.4	10.9	10.0	11.0	11.1	11.0	10.8	11.8	11.0	11.00	0.452	4.11
triangle_2x3_0.02_refined	10.7	11.2	10.9	10.4	10.8	11.2	11.1	11.0	10.3	11.0	10.85	0.322	2.97
triangle_2x3_0.03_refined	10.9	10.7	10.6	10.9	11.4	10.9	10.5	11.3	11.1	10.6	10.90	0.302	2.77
triangle_3x2_0.01_refined	11.2	11.3	11.4	11.1	10.9	11.5	11.0	11.5	11.0	11.4	11.23	0.221	1.97
triangle_3x2_0.02_refined	10.8	11.1	11.1	11.3	11.4	11.3	10.9	11.4	11.1	11.2	11.15	0.195	1.75
triangle_3x2_0.03_refined	11.1	11.6	11.0	10.0	11.5	10.8	11.0	11.1	11.4	10.9	11.06	0.444	4.02
triangle_3x3_0.01_refined	10.6	11.0	10.9	10.8	11.1	10.6	10.8	10.7	10.7	11.2	10.84	0.199	1.84
triangle_3x3_0.02_refined	11.4	11.0	10.6	11.5	10.5	11.0	11.1	11.2	10.7	10.6	10.96	0.359	3.27
triangle_3x3_0.03_refined	10.9	10.5	11.1	10.9	11.0	11.1	11.0	11.1	11.2	10.8	10.96	0.199	1.82

Nota: Elaboración propia.

Figura 81

Velocidad promedio en comparación con el vertedero original en la sección de control 2.

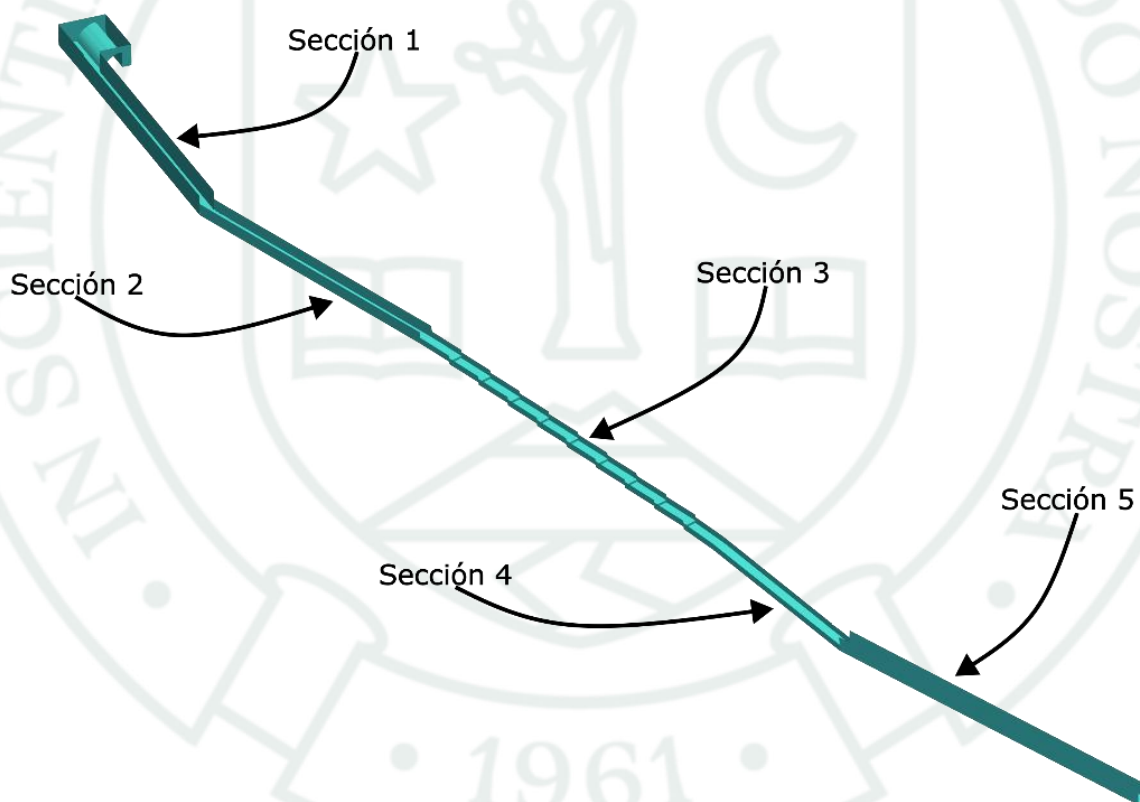


1.2. Resultados de los tirantes del flujo

El análisis de los tirantes se realiza a lo largo de todo el canal, sin embargo, para facilitar la visualización se han dividido en cinco secciones correspondientes a las particularidades geométricas del vertedero, las mismas que se definen en la Figura 82. Así, para la extracción de la superficie libre se fijó el valor de α_{water} como 0.5. A partir de lo obtenido, se ha elegido presentar los tirantes promedios de cada progresiva (obtenido a partir del promedio de los tirantes en la sección transversal) mostrando la tercera sección en la Figura 83 y el resto de secciones en el Anexo 1. Además, se ha elegido presentar el tirante máximo de cada progresiva (obtenido a partir del valor máximo de los tirantes de cada sección transversal) mostrando la tercera sección en la Figura 84 y el resto de secciones en el Anexo 2.

Figura 82

Secciones de control longitudinales para el análisis de tirantes



Nota: Elaboración propia.

Figura 83

Tirantes promedio en la sección 3

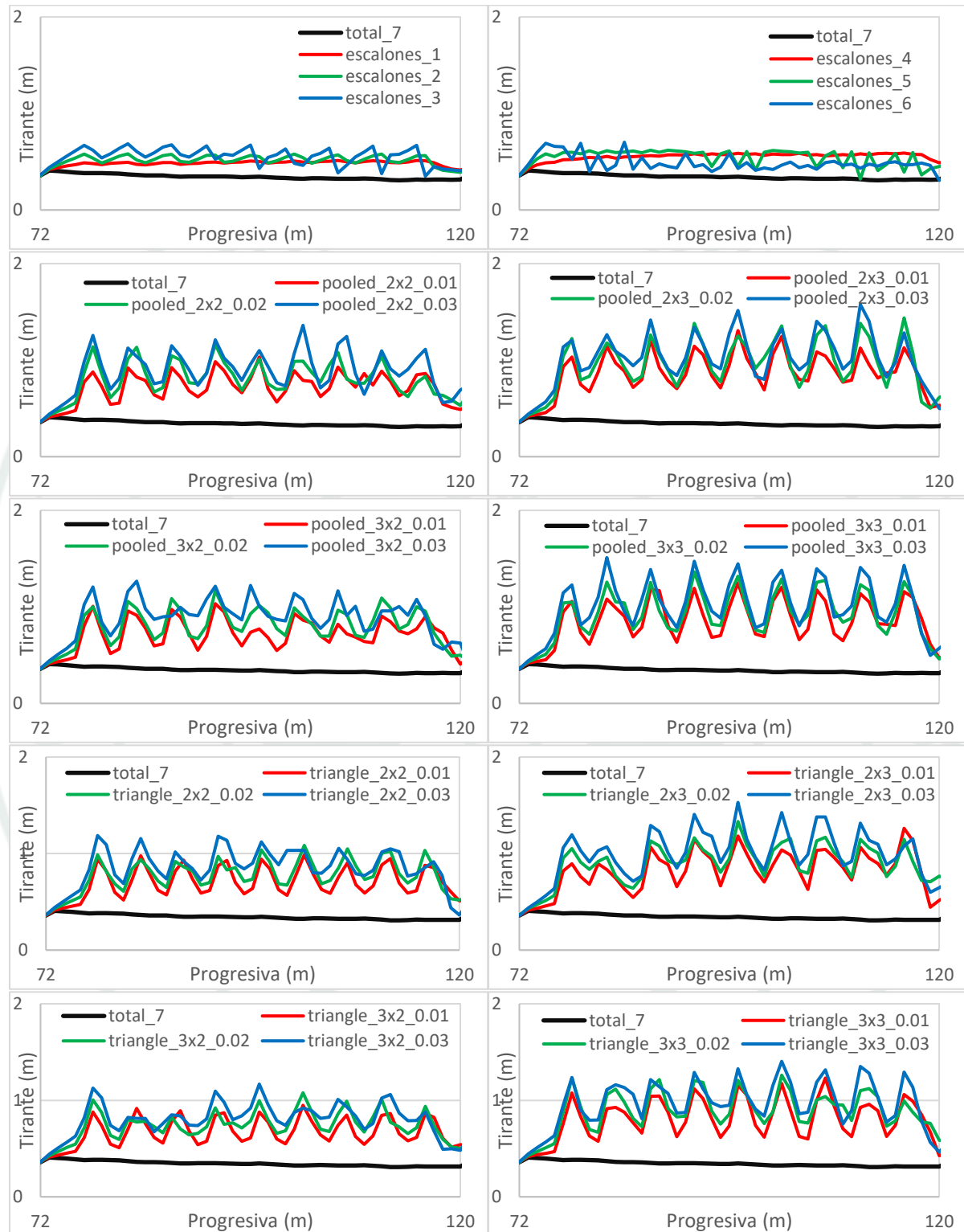
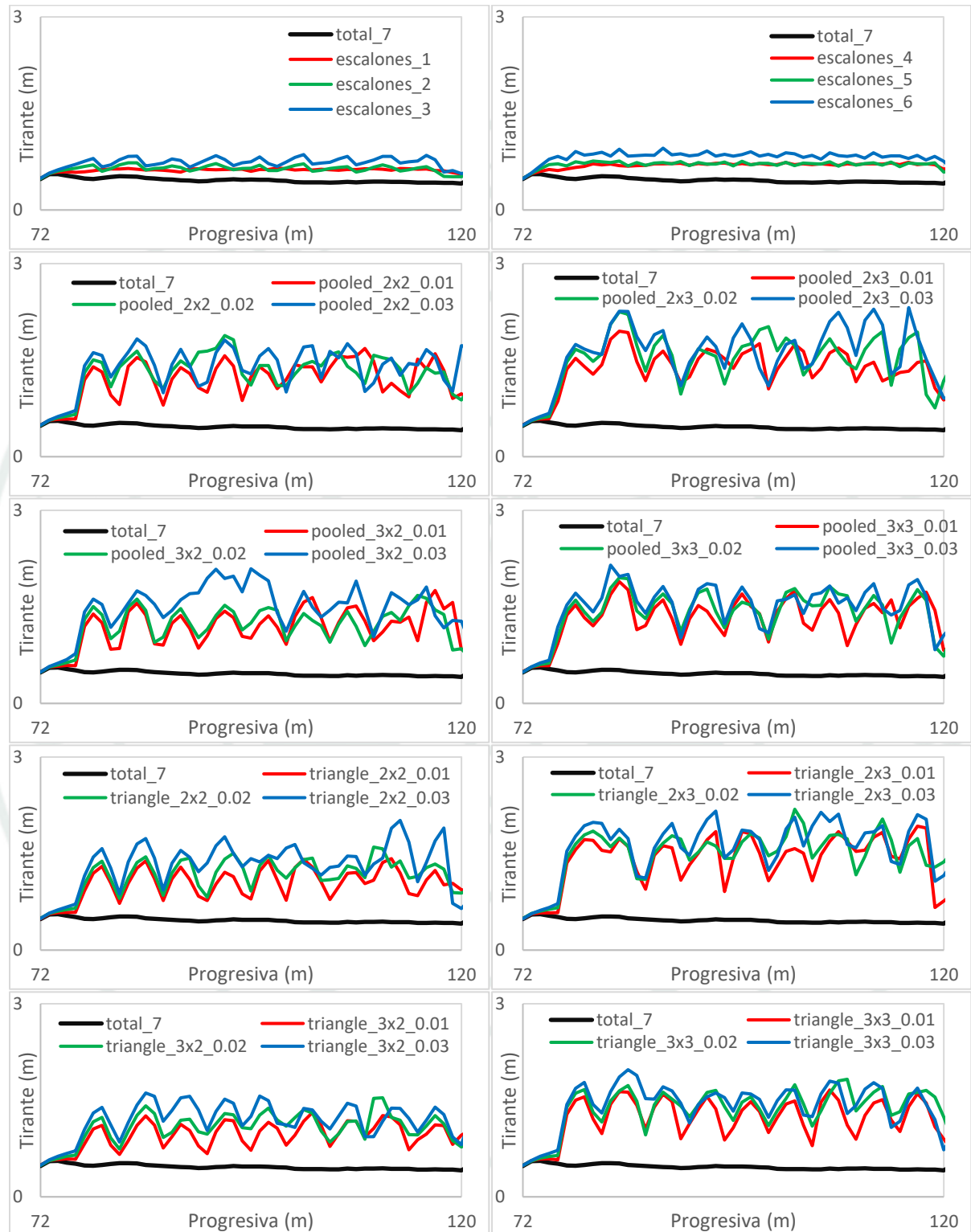


Figura 84

Tirantes máximo en la sección 3

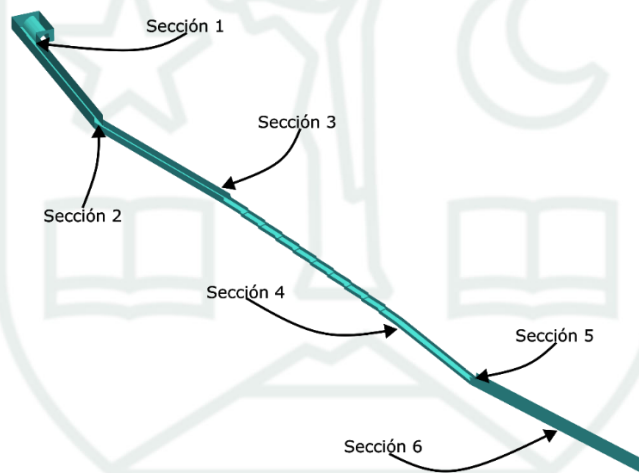


1.3. Resultados de la energía del flujo

El análisis de la energía se da entre seis diferentes secciones de control del vertedero las cuales se muestra en la Figura 85. Además, cada sección se define dentro del dominio mediante una coordenada y un vector normal los que se detallan en la Tabla 37. Seguidamente, para la comparación y cálculos de disipación de energía se ha promediado los diez últimos pasos temporales de la velocidad y tirante promedio, a partir de los cuales se calculará la energía en cada sección. Finalmente, los resultados de la altura de energía específica y total se presentan en la Tabla 38 y Tabla 39 respectivamente, y las líneas de energía total se muestran en la Figura 86, Figura 87, Figura 88, Figura 89, Figura 90, Figura 91, Figura 92, Figura 93, Figura 94 y Figura 95, las cuales han sido agrupadas en grupos de tres con respecto al modelo original y al fondo del canal.

Figura 85

Secciones de control transversal para el análisis de energía



Nota: Elaboración propia.

Tabla 37

Ubicación de las secciones de control para el análisis de energía

Nombre	Progresiva	Coordenada	Vector Normal
Sección de control 1	0+0 m	(0.041, 0.000, 0.000)	(1.000, 0.000, 0.000)
Sección de control 2	0+36 m	(3.600, 0.099, -0.036)	(0.979, 0.203, 0.000)
Sección de control 3	0+72 m	(6.903, 1.530, -0.396)	(0.918, 0.397, 0.000)
Sección de control 4	0+120 m	(11.308, 3.437, -1.356)	(0.918, 0.397, 0.000)
Sección de control 5	0+140.58 m	(13.197, 4.254, -1.932)	(0.852, 0.523, 0.000)
Sección de control 6	0+160.29 m	(14.712, 5.515, -2.484)	(0.813, 0.582, 0.000)

Nota: Elaboración propia.

Tabla 38

Resultados de la altura de energía específica en metros

Modelo	Progresiva (m)					
	0	36	72	120	140	160
total_7	1.46	1.38	3.88	7.62	8.84	9.17
escalones_1	1.47	1.41	3.88	3.88	7.17	8.26
escalones_2	1.46	1.41	3.84	4.59	7.44	8.42
escalones_3	1.47	1.40	3.80	4.22	7.33	8.36
escalones_4	1.46	1.41	3.84	2.83	6.62	8.07
escalones_5	1.46	1.40	3.76	3.49	6.95	8.13
escalones_6	1.46	1.41	3.67	3.84	7.71	8.60
pooled_2x2_0.01	1.47	1.40	3.88	2.39	6.41	8.18
pooled_2x2_0.02	1.46	1.40	3.83	2.56	6.33	8.25
pooled_2x2_0.03	1.48	1.40	3.80	2.62	6.42	8.21
pooled_2x3_0.01	1.47	1.40	3.89	2.56	6.40	7.92
pooled_2x3_0.02	1.47	1.40	3.85	2.48	6.35	8.27
pooled_2x3_0.03	1.47	1.40	3.80	2.43	6.19	7.96
pooled_3x2_0.01	1.46	1.40	3.87	2.86	6.56	8.23
pooled_3x2_0.02	1.47	1.40	3.84	2.75	6.54	8.09
pooled_3x2_0.03	1.48	1.40	3.80	2.64	6.34	8.28
pooled_3x3_0.01	1.46	1.40	3.88	2.56	6.35	8.24
pooled_3x3_0.02	1.45	1.41	3.84	2.57	6.37	7.89
pooled_3x3_0.03	1.48	1.40	3.80	2.46	6.35	7.85
triangle_2x2_0.01	1.46	1.40	3.88	2.95	6.67	8.06
triangle_2x2_0.02	1.47	1.39	3.84	2.84	6.45	7.96
triangle_2x2_0.03	1.47	1.40	3.80	2.63	6.37	8.03
triangle_2x3_0.01	1.47	1.40	3.88	2.41	6.43	7.82
triangle_2x3_0.02	1.46	1.41	3.85	2.44	6.23	7.87
triangle_2x3_0.03	1.45	1.39	3.78	2.43	6.30	7.89
triangle_3x2_0.01	1.47	1.41	3.88	2.89	6.66	8.17
triangle_3x2_0.02	1.47	1.40	3.84	2.87	6.58	8.16
triangle_3x2_0.03	1.47	1.40	3.79	2.85	6.48	8.19
triangle_3x3_0.01	1.46	1.40	3.87	2.43	6.23	8.12
triangle_3x3_0.02	1.46	1.40	3.83	2.52	6.37	7.86
triangle_3x3_0.03	1.46	1.40	3.79	2.54	6.49	8.03

Nota: Elaboración propia.

Tabla 39

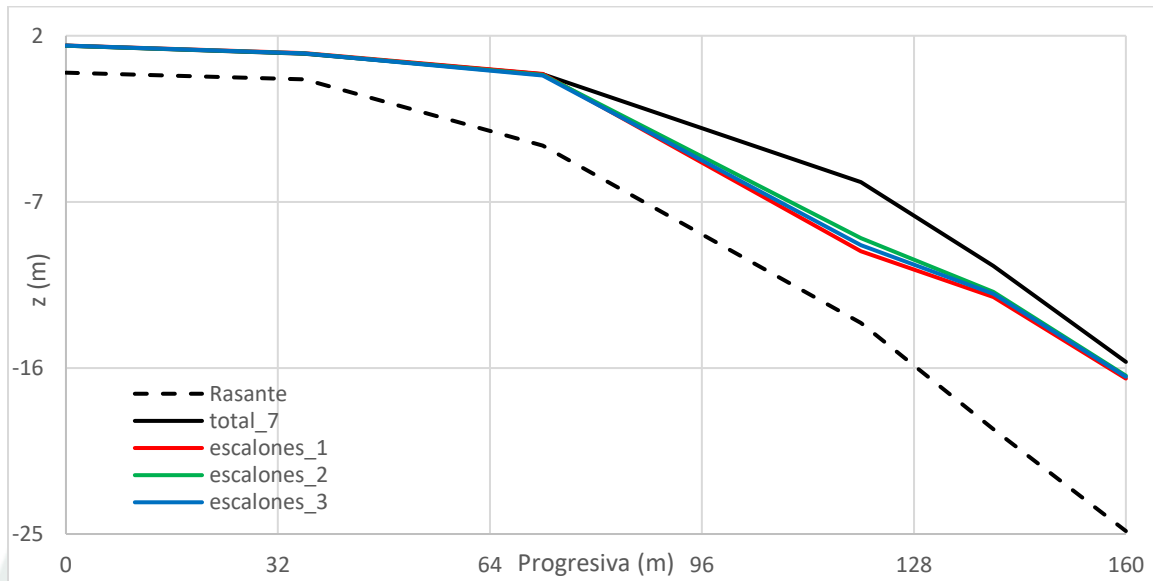
Resultados de la altura de energía total en metros

Modelo	Progresiva					
	0	36	72	120	140	160
total_7	1.46	1.02	-0.08	-5.94	-10.48	-15.67
escalones_1	1.47	1.05	-0.08	-9.68	-12.16	-16.58
escalones_2	1.46	1.05	-0.12	-8.97	-11.88	-16.42
escalones_3	1.47	1.04	-0.16	-9.34	-11.99	-16.48
escalones_4	1.46	1.05	-0.12	-10.73	-12.70	-16.77
escalones_5	1.46	1.04	-0.20	-10.07	-12.37	-16.71
escalones_6	1.46	1.05	-0.29	-9.72	-11.61	-16.24
pooled_2x2_0.01	1.47	1.04	-0.08	-11.17	-12.91	-16.66
pooled_2x2_0.02	1.46	1.04	-0.13	-11.00	-12.99	-16.59
pooled_2x2_0.03	1.48	1.04	-0.16	-10.94	-12.90	-16.63
pooled_2x3_0.01	1.47	1.04	-0.07	-11.00	-12.93	-16.92
pooled_2x3_0.02	1.47	1.04	-0.11	-11.08	-12.97	-16.57
pooled_2x3_0.03	1.47	1.04	-0.16	-11.13	-13.14	-16.88
pooled_3x2_0.01	1.46	1.04	-0.09	-10.70	-12.76	-16.61
pooled_3x2_0.02	1.47	1.04	-0.12	-10.81	-12.78	-16.75
pooled_3x2_0.03	1.48	1.04	-0.16	-10.92	-12.98	-16.56
pooled_3x3_0.01	1.46	1.04	-0.08	-11.00	-12.97	-16.60
pooled_3x3_0.02	1.45	1.05	-0.12	-10.99	-12.96	-16.95
pooled_3x3_0.03	1.48	1.04	-0.16	-11.10	-12.98	-16.99
triangle_2x2_0.01	1.46	1.04	-0.08	-10.61	-12.65	-16.78
triangle_2x2_0.02	1.47	1.03	-0.12	-10.72	-12.88	-16.88
triangle_2x2_0.03	1.47	1.04	-0.16	-10.93	-12.95	-16.81
triangle_2x3_0.01	1.47	1.04	-0.08	-11.15	-12.89	-17.02
triangle_2x3_0.02	1.46	1.05	-0.11	-11.12	-13.09	-16.97
triangle_2x3_0.03	1.45	1.03	-0.18	-11.13	-13.03	-16.95
triangle_3x2_0.01	1.47	1.05	-0.08	-10.67	-12.66	-16.67
triangle_3x2_0.02	1.47	1.04	-0.12	-10.69	-12.74	-16.68
triangle_3x2_0.03	1.47	1.04	-0.17	-10.71	-12.84	-16.65
triangle_3x3_0.01	1.46	1.04	-0.09	-11.13	-13.09	-16.72
triangle_3x3_0.02	1.46	1.04	-0.13	-11.04	-12.95	-16.98
triangle_3x3_0.03	1.46	1.04	-0.17	-11.02	-12.83	-16.81

Nota: Elaboración propia.

Figura 86

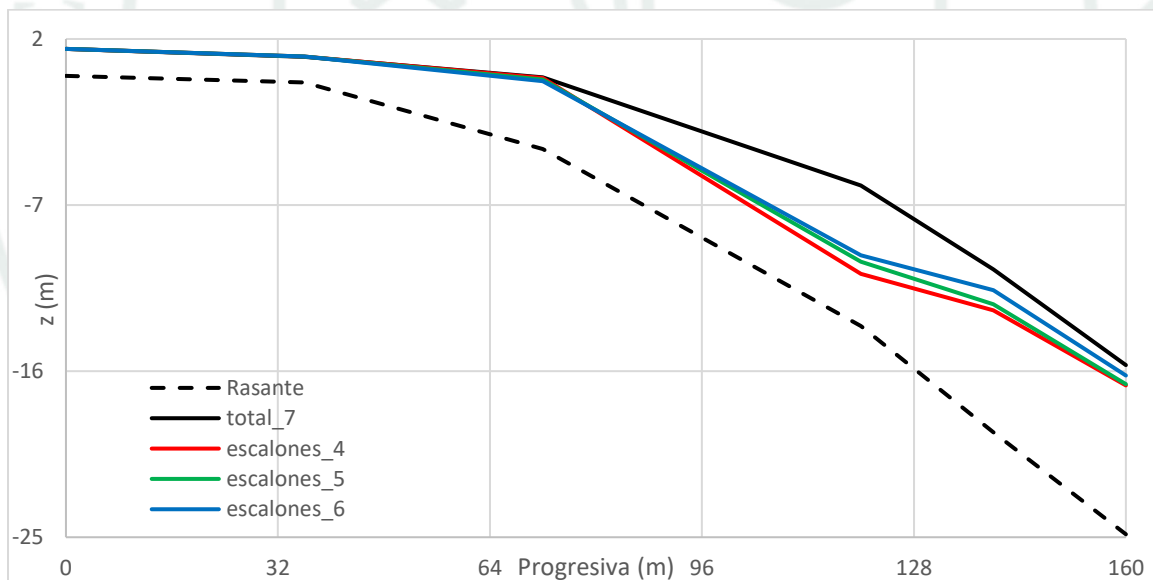
Línea de energía del modelo original y escalones_1, escalones_2, escalones_3



Nota: Elaboración propia.

Figura 87

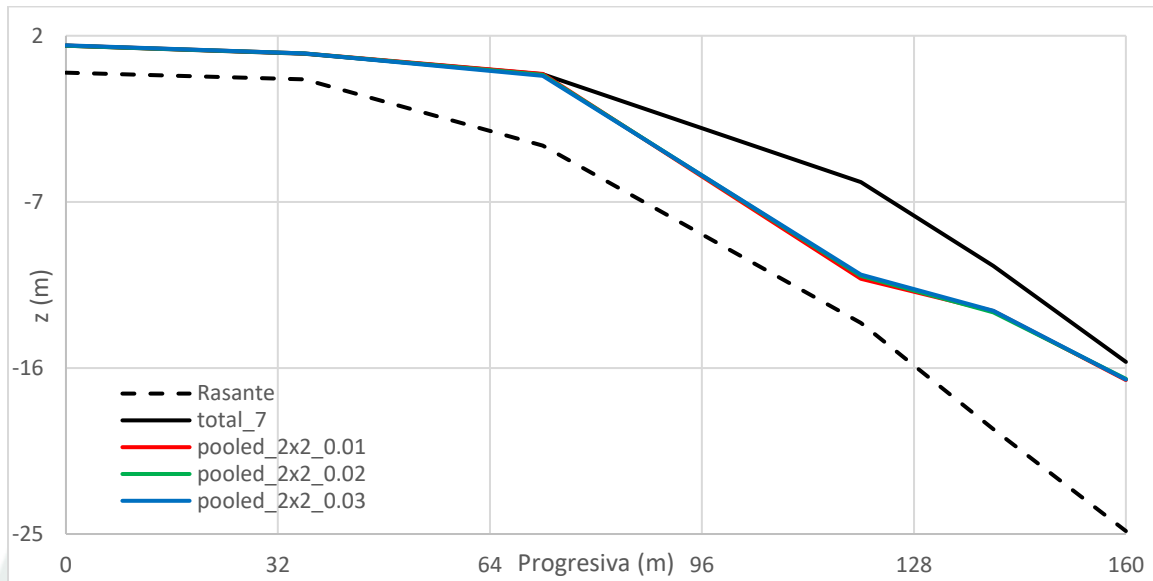
Línea de energía del modelo original y escalones_4, escalones_5, escalones_6



Nota: Elaboración propia.

Figura 88

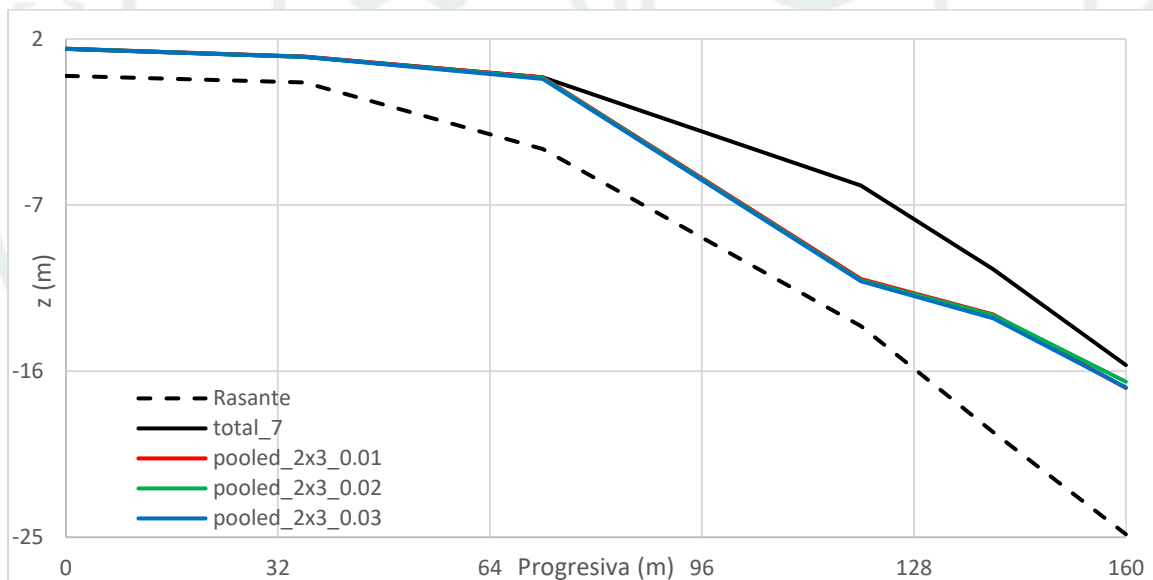
Línea de energía del modelo original y pooled 2x2_0.01, 2x2_0.02 y 2x2_0.03



Nota: Elaboración propia.

Figura 89

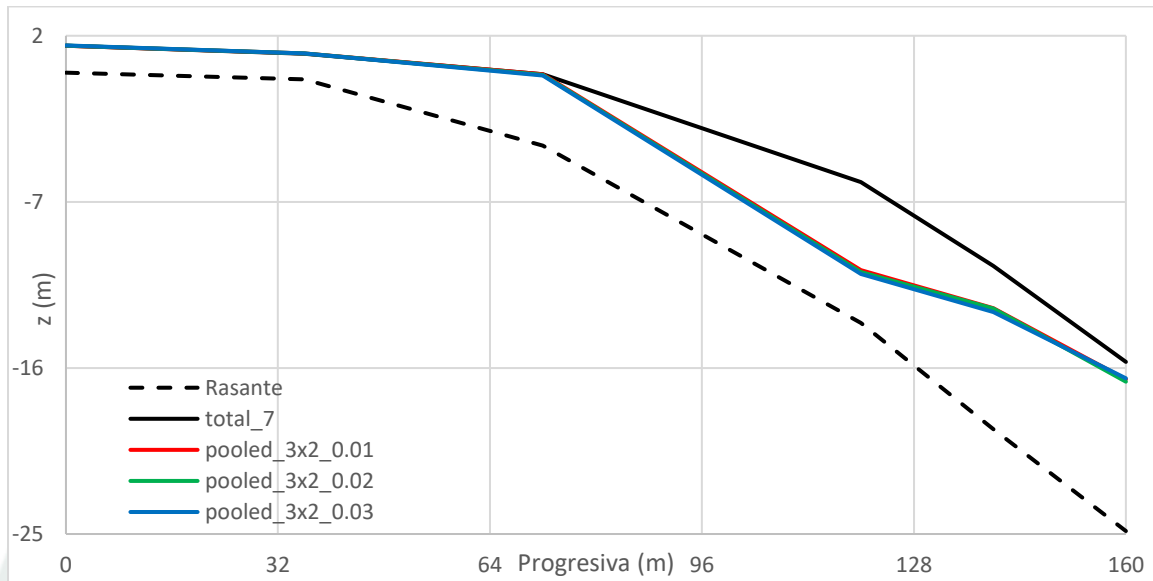
Línea de energía del modelo original y pooled 2x3_0.01, 2x3_0.02 y 2x3_0.03



Nota: Elaboración propia.

Figura 90

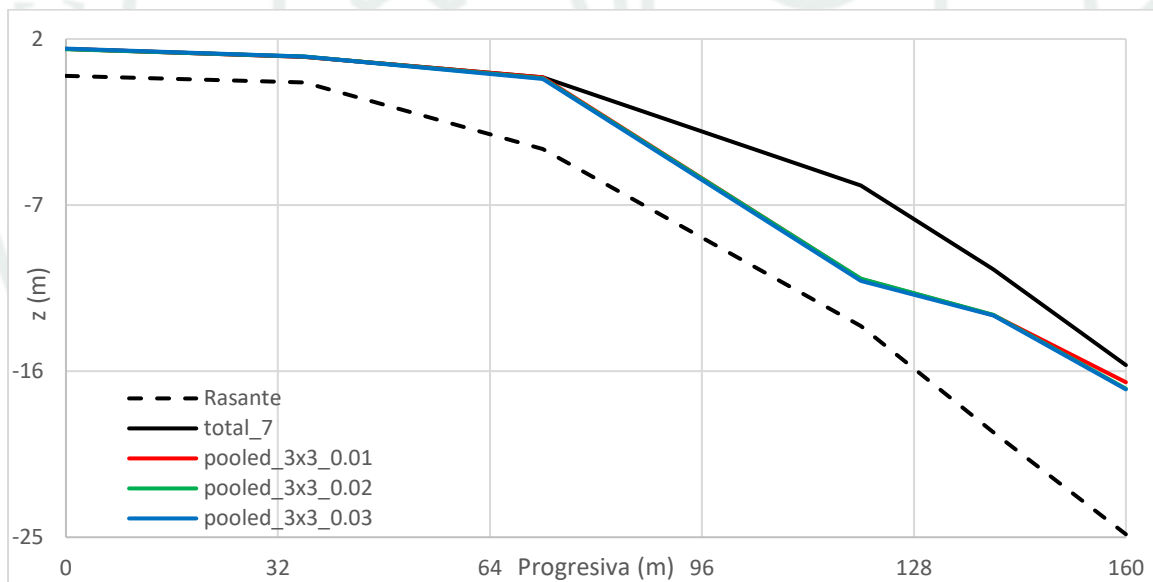
Línea de energía del modelo original y pooled 3x2_0.01, 3x2_0.02 y 3x2_0.03



Nota: Elaboración propia.

Figura 91

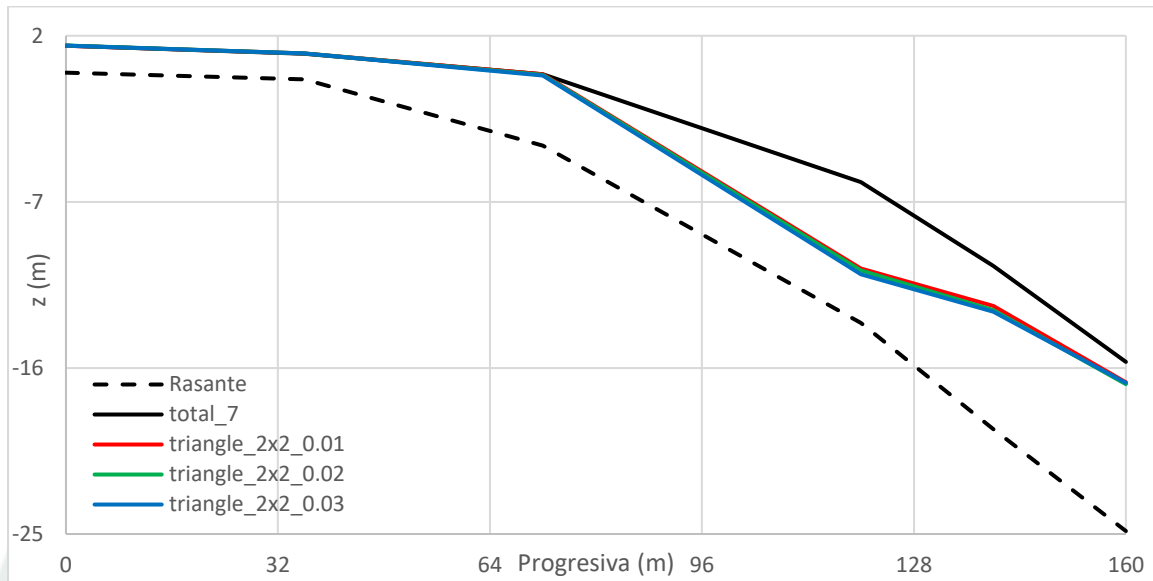
Línea de energía del modelo original y pooled 3x3_0.01, 3x3_0.02 y 3x3_0.03



Nota: Elaboración propia.

Figura 92

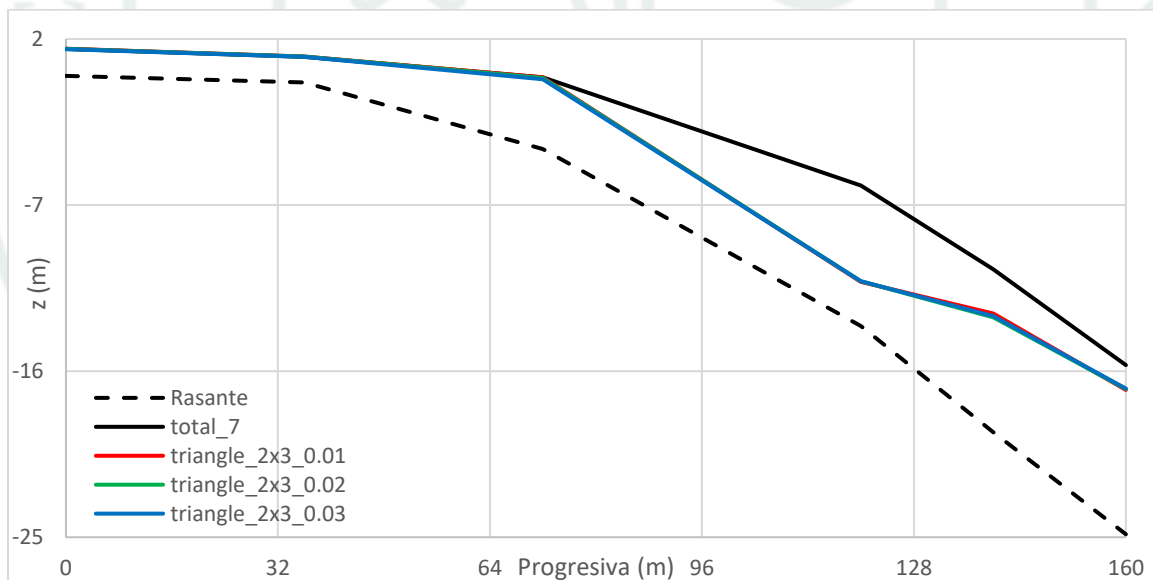
Línea de energía del modelo original y triangle 2x2_0.01, 2x2_0.02 y 2x2_0.03



Nota: Elaboración propia.

Figura 93

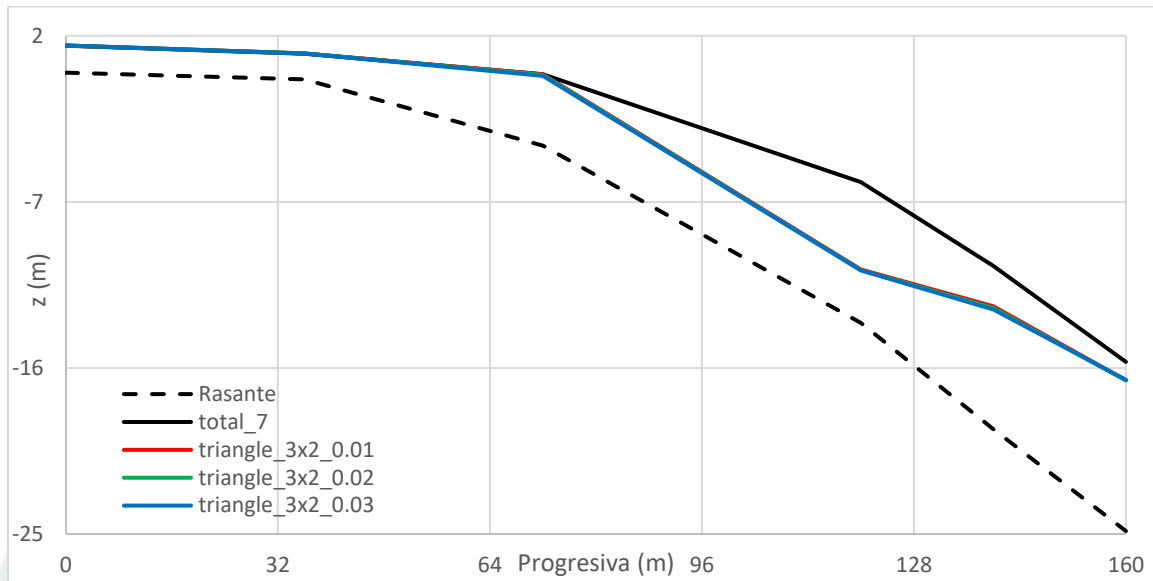
Línea de energía del modelo original y triangle 2x3_0.01, 2x3_0.02 y 2x3_0.03



Nota: Elaboración propia.

Figura 94

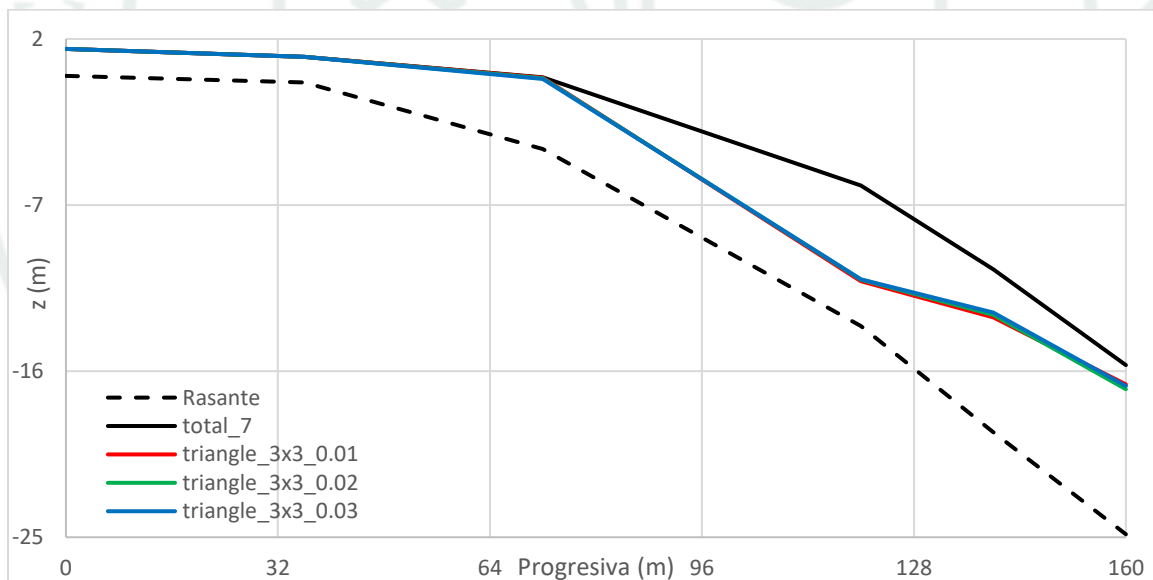
Línea de energía del modelo original y triangle 3x2_0.01, 3x2_0.02 y 3x2_0.03



Nota: Elaboración propia.

Figura 95

Línea de energía del modelo original y triangle 3x3_0.01, 3x3_0.03 y 3x3_0.03



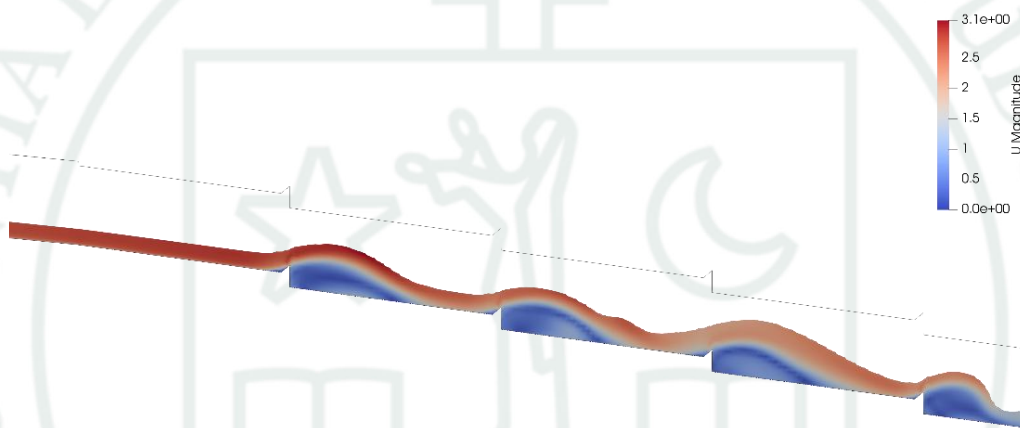
Nota: Elaboración propia.

1.4. Resultados del comportamiento del flujo

En esta sección se presenta la superficie libre y los vectores de velocidad del flujo exclusivamente en la tercera sección del canal, correspondiente a la zona escalonada de interés. A partir de las imágenes se puede definir cualitativamente el comportamiento rasante o saltante del flujo, el cual influencia en la eficiencia hidráulica del vertedero. La Figura 96 y Figura 97 muestran el comportamiento global del flujo y la distribución de los vectores de velocidad alrededor de un escalón para uno de los modelos simulados. Similarmente, en el Anexo 3 se muestran los resultados de todas las simulaciones.

Figura 96

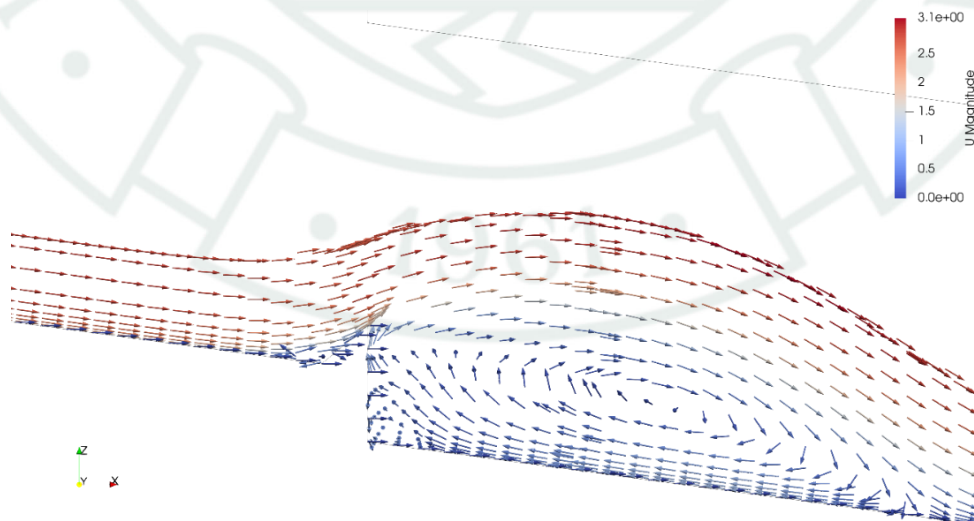
Comportamiento global del flujo del modelo triangle_2x2_0.03



Nota: Elaboración propia.

Figura 97

Distribución de vectores de velocidad del modelo triangle_2x2_0.03



Nota: Elaboración propia.

2. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

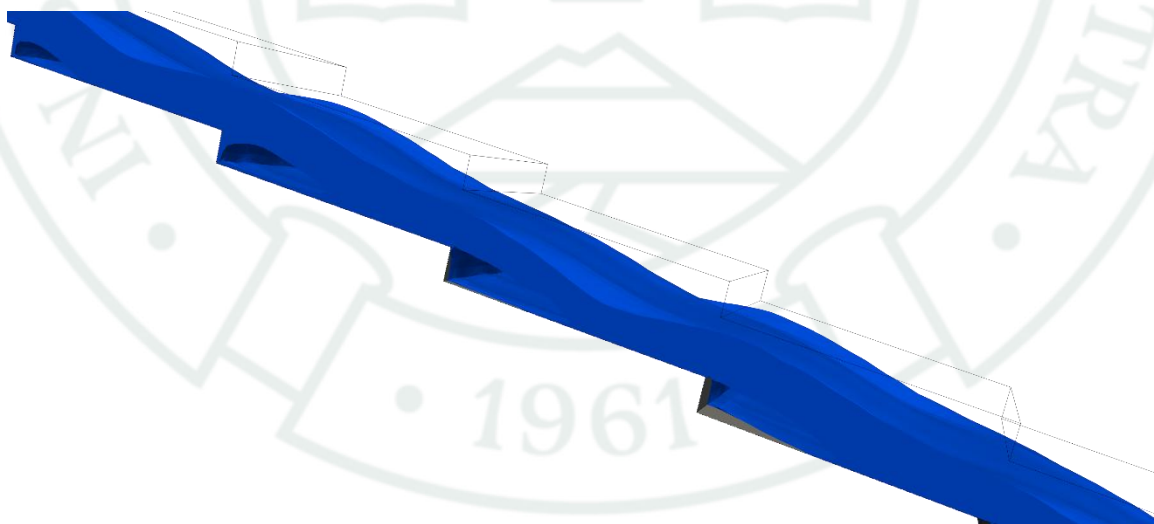
A continuación, se analizan y discuten los resultados presentados en la sección anterior para poder definir el diseño más óptimo del vertedero de la represa Coltani, a partir del análisis integral de las diferentes variables de control y su influencia en la eficiencia hidráulica de cada modelo.

2.1. Influencia del número de escalones

La Figura 99 muestra la comparación de la altura de energía total de los modelos con 9 escalones (en línea azul) con respecto a los modelos con 19 escalones (en línea roja) para diferentes alturas de escalón, además muestra la línea de energía del modelo original como referencia. Por lo tanto, a partir de ellos se puede determinar que, para diferentes condiciones de altura de escalón, los modelos con 19 escalones disipan más energía, sobre todo en el tramo escalonado del vertedero. Sin embargo, se aprecia que, para una altura de escalón de 30 cm, correspondientes a los modelos escalones_3 y escalones_6, la disipación es menor, esto se explica por el que el flujo del modelo escalones_6 se encuentra en un régimen saltante como se muestra en la Figura 98, lo que indicaría que las cualidades disipadoras de este tipo de régimen son menores al del régimen rasante.

Figura 98

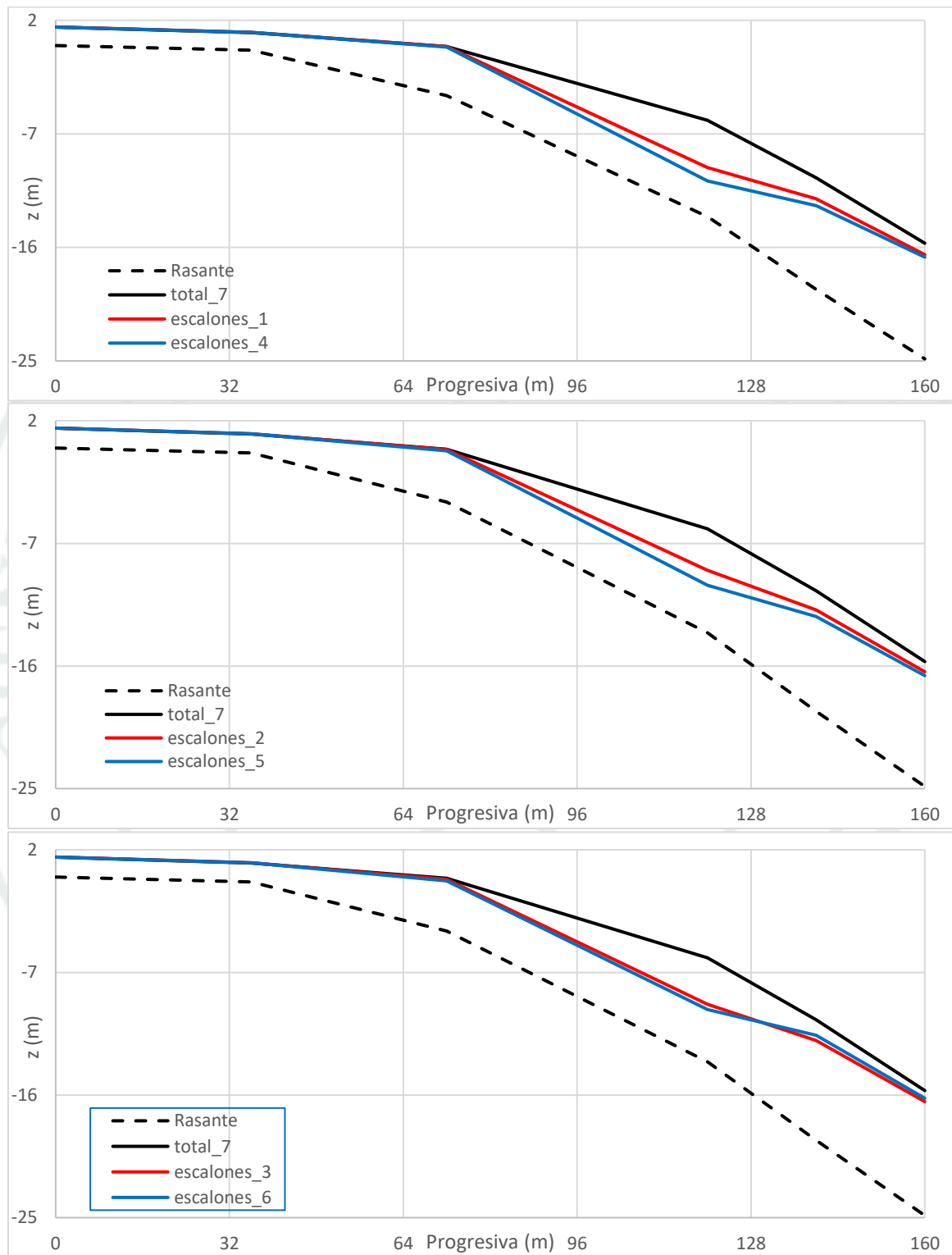
Régimen de flujo saltante a través del vertedero escalones_6



Nota: Elaboración propia.

Figura 99

Comparación de la altura de energía total para modelos con diferentes números de escalones



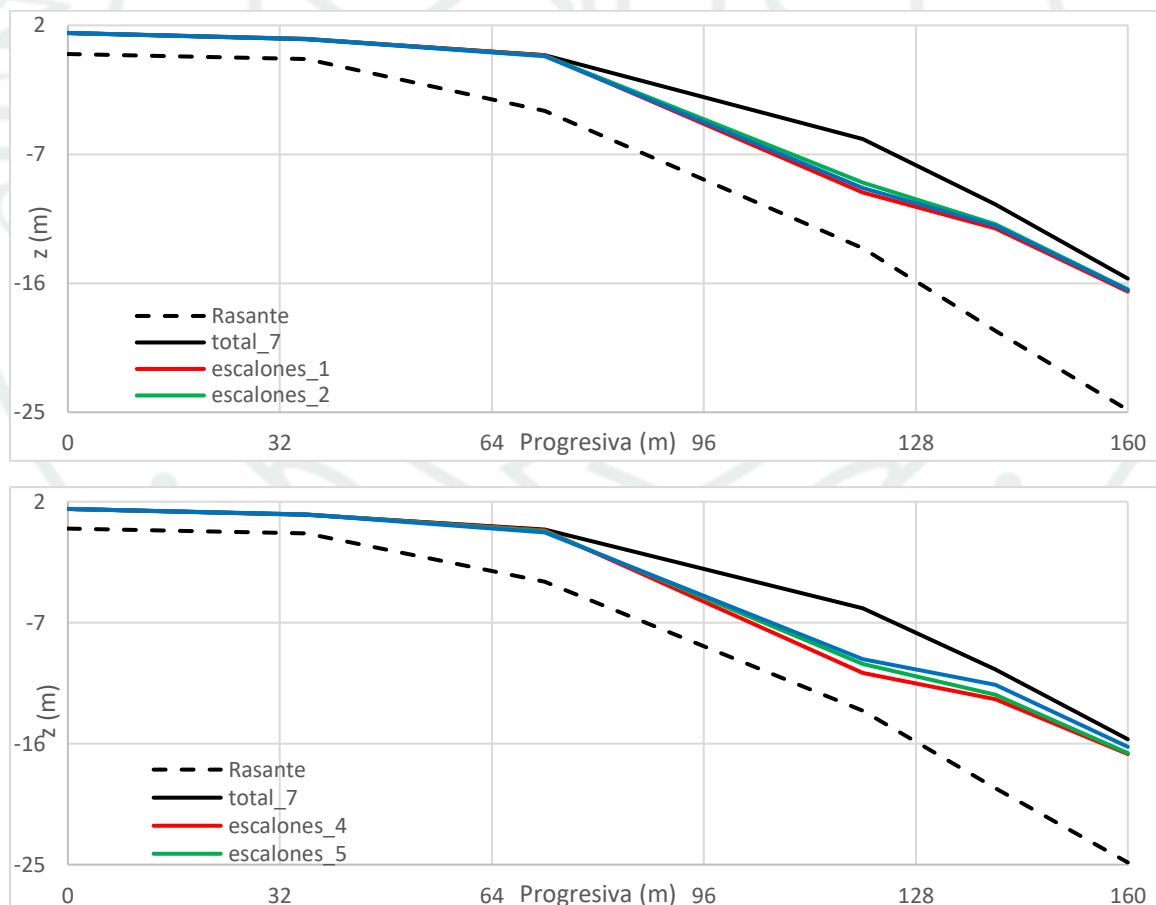
Nota: Elaboración propia.

2.2. Influencia de la altura de escalón

La Figura 100 muestra la comparación de la altura de energía total para modelos con diferentes alturas de escalones, tanto para los modelos de 9 escalones (gráfico superior), como para los modelos de 19 escalones (gráfico inferior). De ellos se puede concluir que se disipa mayor energía en cuanto menor sea el alto del escalón, en ambas gráficas la línea roja, que representa los modelos con alto de escalón de 10 cm, es la que mayor disipación de energía muestra. Además, a partir del análisis del comportamiento del flujo mostrado en la Figura 101 se observa que la altura de escalón es un factor importante en la determinación del tipo de régimen del flujo (entre rasante o saltante), ya que superado cierto alto de escalón, el flujo se empezará a tornar más saltante y por lo tanto su mecanismo de disipación de energía será diferente, este fenómeno se observa para ambos casos (9 y 19 escalones) a partir de una altura de escalón de 30 cm.

Figura 100

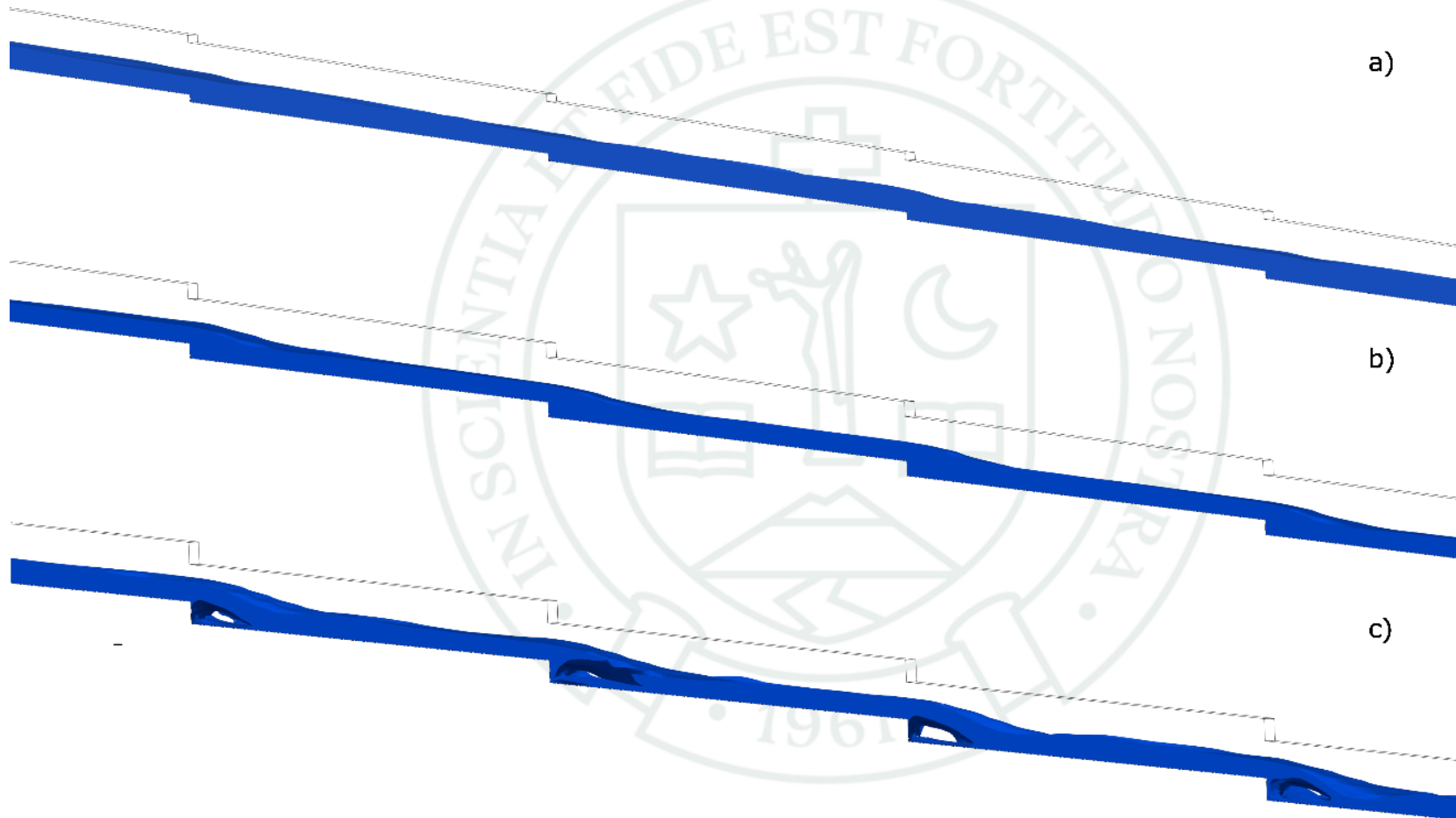
Comparación de la altura de energía total para modelos con diferente altura de escalón



Nota: Elaboración propia.

Figura 101

Comportamiento del flujo en los escalones cuarto, quinto, sexto y séptimo escalón de los modelos escalones_1 (a), escalones_2 (b) y escalones_3 (c) para una fracción de agua mayor a 0.8.



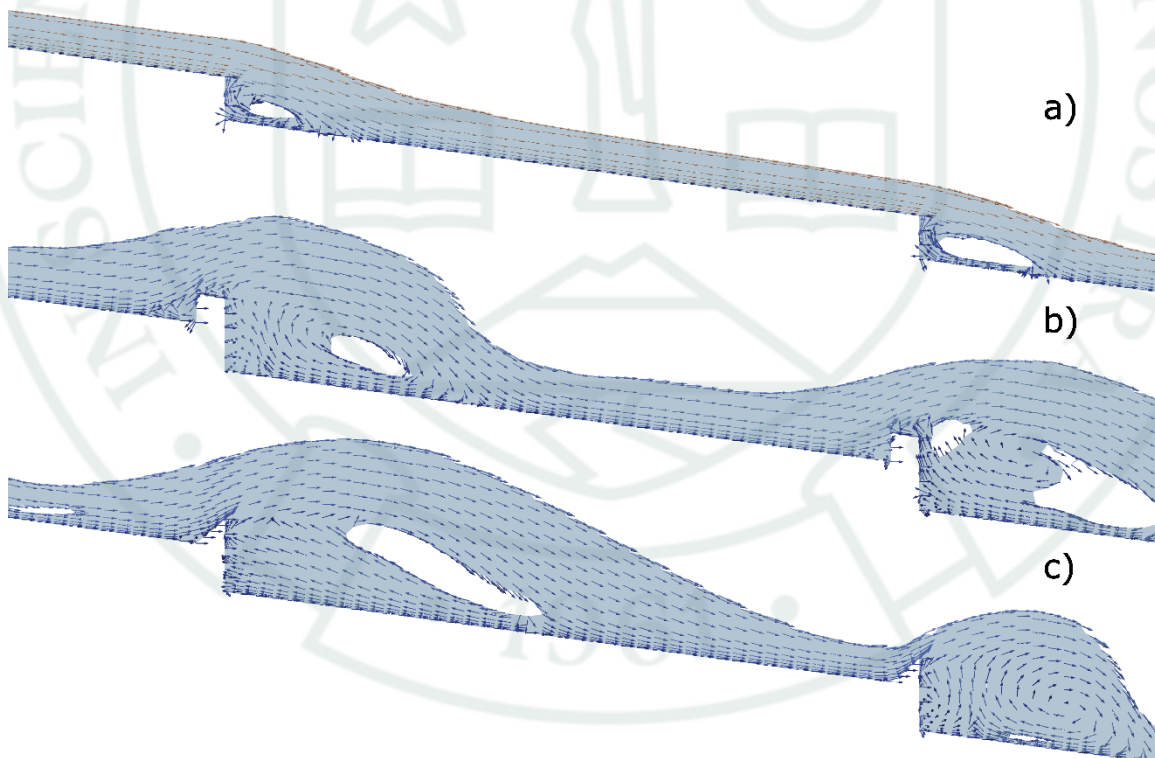
Nota: Elaboración propia.

2.3. Influencia de la tipología del escalón

A continuación, se presenta el análisis de las tres diferentes tipologías modeladas, para ello se presenta la Figura 103 en la que se grafica la altura de la línea de energía total del modelo regular, poza rectangular y poza triangular para tres distintos altos de escalón (escalón de 10 cm en el gráfico superior, escalón de 20 cm en el gráfico del medio y escalón de 20 cm en el gráfico inferior). Así, se puede decir que los escalones regulares son los que menor desempeño en términos de disipación de energía presentan, por otro lado, los escalones con pozas rectangulares son los que mejor disipación de energía registran, presentando un mejor rendimiento sobre las pozas triangulares. Sin embargo, este efecto es más notorio para un alto de escalón de 10 cm y se va reduciendo hasta que para un alto de 30 cm los escalones de tipo poza rectangular y triangular presentan el mismo rendimiento, al ser el régimen saltante que domina el flujo como se muestra en la Figura 102.

Figura 102

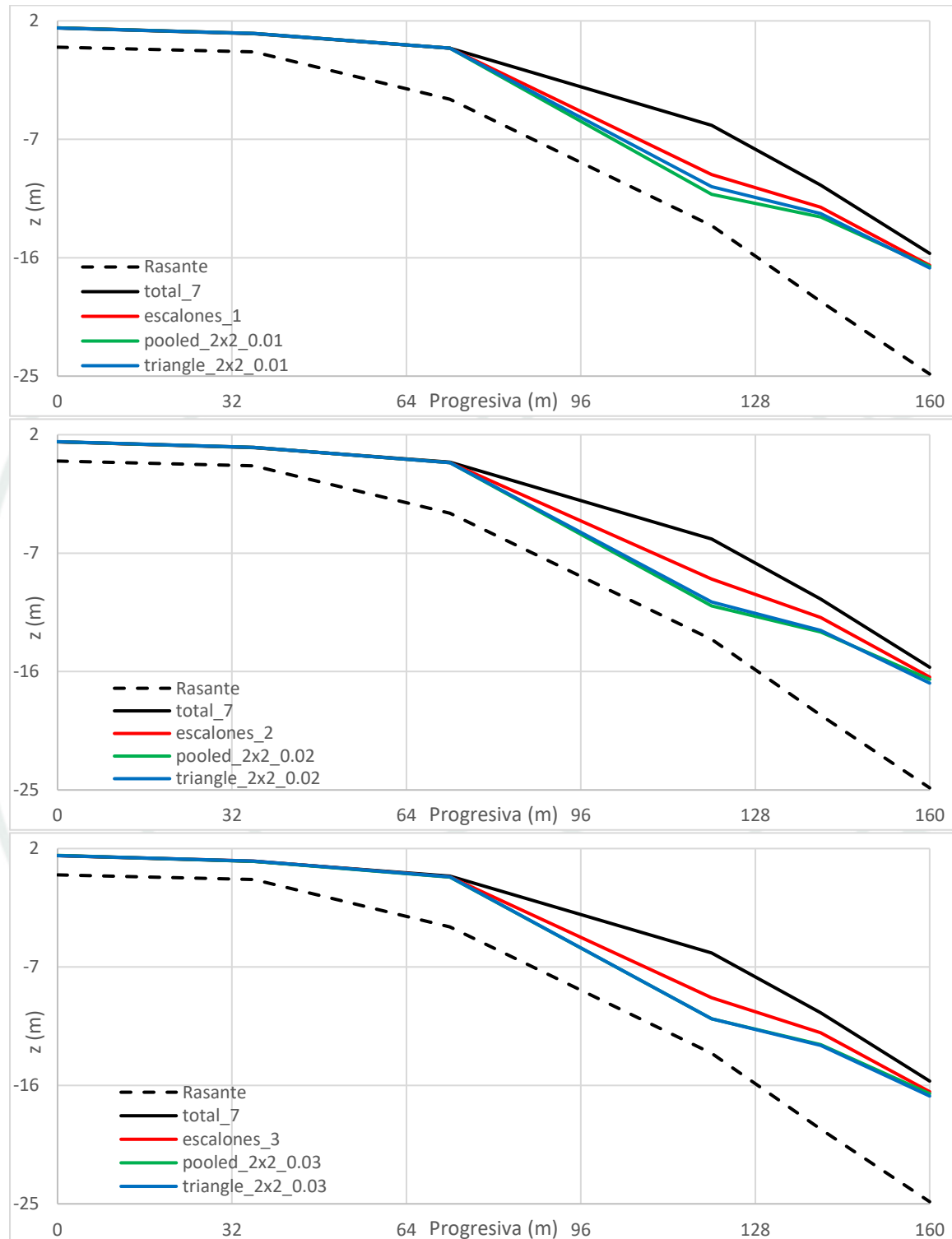
Comportamiento del flujo del tercer y cuarto escalón de los modelos escalones_3 (a), pooled_2x2_0.03 (b) y triangle_2x2_0.03 (c) para una fracción de agua mayor a 0.8.



Nota: Elaboración propia.

Figura 103

Comparación de la altura de energía total para modelos con diferentes tipologías



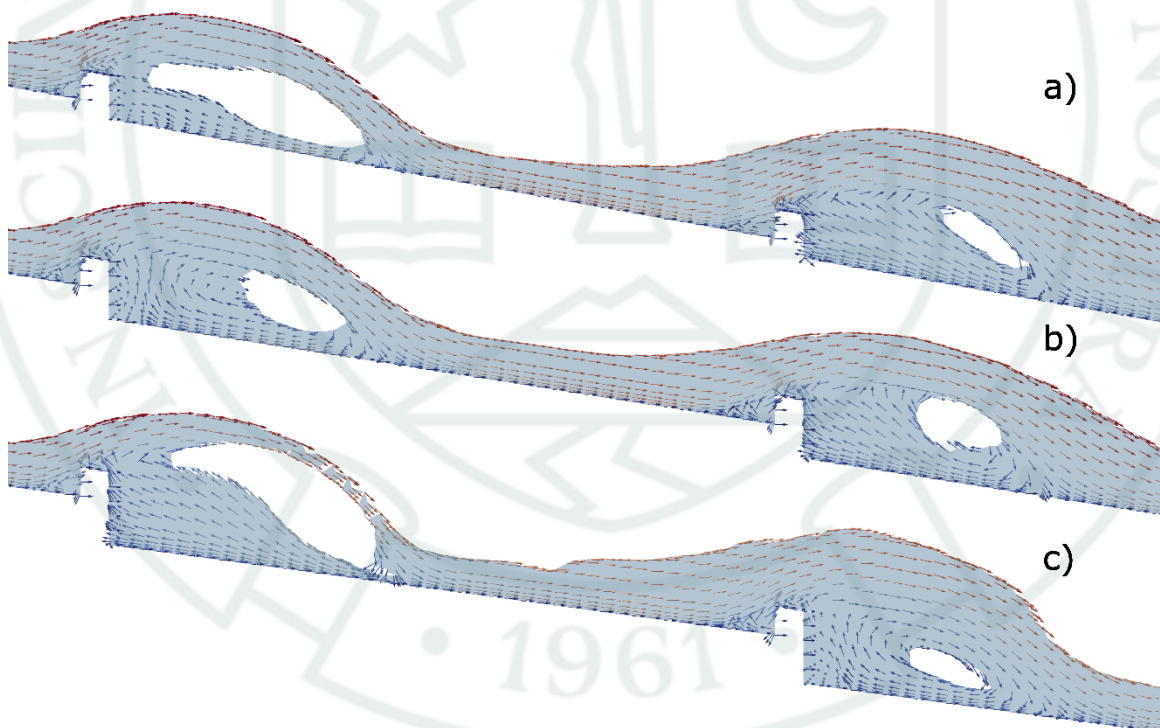
Nota: Elaboración propia.

2.4. Influencia de la altura del escalón para las tipologías especiales.

En esta sección se trata de definir si para las tipologías de poza rectangular y poza triangular el alto de escalón tiene influencia en su capacidad de disipación, por lo tanto, a partir de la información graficada en las Figuras Figura 88, Figura 89, Figura 90, Figura 91, Figura 92, Figura 93, Figura 94 y Figura 95, donde se agrupan modelos con las mismas características de poza pero con altos de escalón variando desde los 10 cm hasta los 30 cm, no se puede encontrar una correlación entre el alto del escalón y la energía disipada. Así, la Figura 104 muestra el comportamiento del flujo para las pozas de 20x20 cm, para todos los casos se observa que el área de recirculación se encuentra sumamente aireada al encontrarse en un régimen de flujo saltante, el tamaño vario de escalón en escalón y según el paso temporal al ser inestable.

Figura 104

Comportamiento del flujo del segundo y tercer escalón de los modelos pooled_2x2_0.01 (a), pooled_2x2_0.02 (b) y pooled_2x2_0.03 (c) para una fracción de agua mayor a 0.8.



Nota: Elaboración propia.

2.5. Influencia de las dimensiones de las pozas

En esta sección se analiza los resultados para las diferentes dimensiones de pozas rectangulares y triangulares que se modelaron variando el alto y ancho de las rectangulares, y la base y altura de las triangulares. La Figura 105 muestra una sección ampliada de las líneas de energías agrupándolas por tipo de pozas para la altura de escalón de 10 y 20 cm, sin embargo, la variación de alto o ancho no producen cambios significativos en las propiedades de disipación, si bien las líneas no son idénticas, el margen de variación es muy pequeño para poder establecer conclusiones al respecto de la influencia de las dimensiones de las pozas. Por lo tanto, se presenta también la Tabla 40 en la cual se muestran la energía específica para distintos tipos de poza, de ella tampoco se puede determinar una correlación entre las dimensiones de las pozas y la energía específica de ese tramo.

Tabla 40

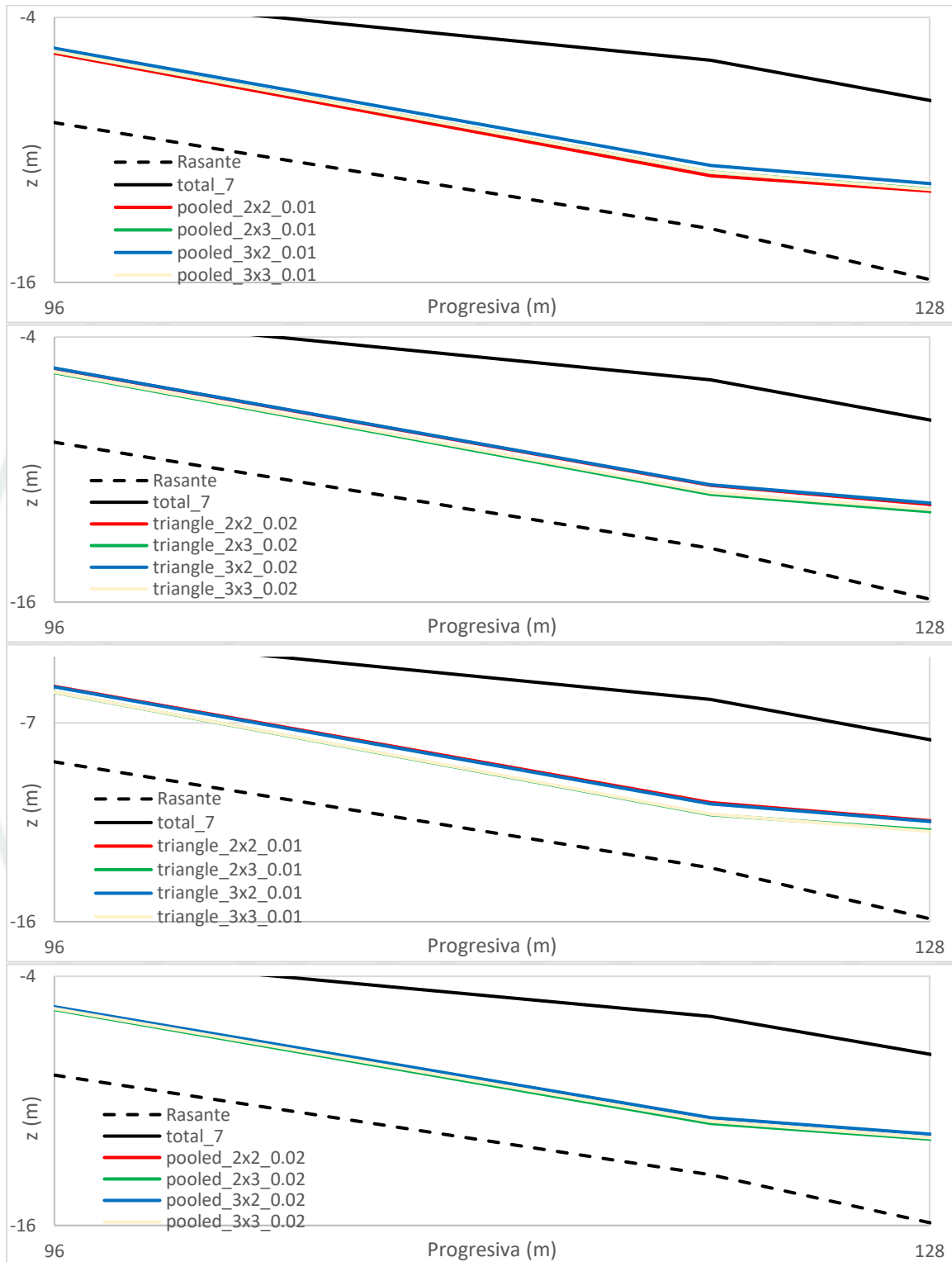
Resultados de la sección 4 agrupados por tipo de poza y alto de escalón.

		Datum (m)	Progresiva (m)	Tirante (m)	V (m/s)	Energía específica (m)
Grupo 1	pooled_2x2_0.01	-13.56	120.00	0.38	6.27	2.39
	pooled_2x3_0.01	-13.56	120.00	0.43	6.47	2.56
	pooled_3x2_0.01	-13.56	120.00	0.37	6.99	2.86
	pooled_3x3_0.01	-13.56	120.00	0.40	6.50	2.56
Grupo 2	pooled_2x2_0.02	-13.56	120.00	0.38	6.53	2.56
	pooled_2x3_0.02	-13.56	120.00	0.43	6.34	2.48
	pooled_3x2_0.02	-13.56	120.00	0.36	6.84	2.75
	pooled_3x3_0.02	-13.56	120.00	0.38	6.54	2.57
Grupo 3	triangle_2x2_0.01	-13.56	120.00	0.36	7.14	2.95
	triangle_2x3_0.01	-13.56	120.00	0.43	6.22	2.41
	triangle_3x2_0.01	-13.56	120.00	0.36	7.05	2.89
	triangle_3x3_0.01	-13.56	120.00	0.37	6.36	2.43
Grupo 4	triangle_2x2_0.02	-13.56	120.00	0.39	6.94	2.84
	triangle_2x3_0.02	-13.56	120.00	0.41	6.31	2.44
	triangle_3x2_0.02	-13.56	120.00	0.37	7.00	2.87
	triangle_3x3_0.02	-13.56	120.00	0.38	6.47	2.52

Nota: Elaboración propia.

Figura 105

Comparación de línea de altura de energía para pozas de diferentes dimensiones.



Nota: Elaboración propia.

2.6. Evaluación integral del desempeño hidráulico

Habiendo analizado la influencia de la incorporación de diferentes tipos de secciones escalonadas sobre el rendimiento hidráulico del vertedero de la represa Coltani, se presenta en esta sección una evaluación integral de todos los modelos simulados. Es así que, para la evaluación del desempeño total del vertedero se presenta la Tabla 41, en ella se muestra los resultados obtenidos entre la sección inicial del vertedero con respecto a la sección 5 y los ordena según su desempeño hidráulico evaluado en términos de disipación de energía. Como era esperado, la simulación correspondiente al vertedero original presenta la menor disipación de energía, disipando 11.94 metros. Por otro lado, el modelo “pooled_2x3_0.03” es el que mayor disipación de energía mostro, disipando 14.50 metros. Por lo tanto, la diferencia de disipación energía entre estos modelos es del 17.65 %.

Para las secciones anteriores a la zona escalonada las pérdidas son similares para el modelo original como para los modelos planteados al ser la misma geometría. Además, a partir de lo observado en las líneas de altura de energía se observa para todos los modelos planteados que la mayor pendiente de fricción se presenta, en el tercer tramo donde se introdujeron los distintos tipos de escalones. Por lo tanto, se presenta la Tabla 42 la cual muestra los resultados obtenidos entre la sección 3 y la sección 4 del vertedero correspondientes al inicio y final del tramo escalonado. Así, se determinó que el modelo original es el que presenta menor disipación de energía, disipando 5.85 metros. Por otro lado, el modelo que presenta mayor disipación en el tramo escalonado es el modelo “pooled_2x2_0.01” con una disipación de 11.10 metros. Entonces, la diferencia de disipación de energía entre estos modelos es del 47.29 %.

Por otro lado, para el cuarto tramo y según lo mostrado en la Tabla 43 ocurre lo contrario, es decir la mayor disipación de energía se presenta para el modelo original, esto debido a que, al estar dentro del régimen de canales normales, el flujo tiende a la velocidad normal de 13 m/s y tirante normal de 0.19 m calculado a partir de la pendiente, la sección y el caudal. El quinto tramo muestra el mismo fenómeno, pero no es interpretado por estar muy cercano a los límites del domino computacional. A partir de esto, se puede decir que la influencia del tramo escalonado se ve reducida debido al tránsito al régimen de rápidas en los dos tramos finales.

Tabla 41

Comparación de resultados entre la sección inicial y la sección 5

	SECCIÓN 1						SECCIÓN 5						ΔE
	z (m)	x (m)	y (m)	V (m/s)	E. E. (m)	E. T. (m)	z (m)	x (m)	y (m)	V (m/s)	E. E. (m)	E. T. (m)	
total_7	0	0	1.08	2.74	1.46	1.46	-19.32	140	0.21	13.01	8.84	-10.48	11.94
escalones_6	0	0	1.07	2.77	1.46	1.46	-19.32	140	0.22	12.13	7.71	-11.61	13.08
escalones_2	0	0	1.06	2.78	1.46	1.46	-19.32	140	0.23	11.89	7.44	-11.88	13.34
escalones_3	0	0	1.09	2.74	1.47	1.47	-19.32	140	0.23	11.80	7.33	-11.99	13.46
escalones_1	0	0	1.06	2.84	1.47	1.47	-19.32	140	0.23	11.66	7.17	-12.16	13.63
escalones_5	0	0	1.08	2.75	1.46	1.46	-19.32	140	0.24	11.48	6.95	-12.37	13.83
triangle_2x2_0.01	0	0	1.06	2.79	1.46	1.46	-19.32	140	0.24	11.24	6.67	-12.65	14.11
triangle_3x2_0.01	0	0	1.07	2.81	1.47	1.47	-19.32	140	0.24	11.23	6.66	-12.66	14.13
escalones_4	0	0	1.07	2.79	1.46	1.46	-19.32	140	0.24	11.19	6.62	-12.70	14.16
pooled_3x2_0.01	0	0	1.07	2.77	1.46	1.46	-19.32	140	0.24	11.14	6.56	-12.76	14.22
triangle_3x2_0.02	0	0	1.08	2.76	1.47	1.47	-19.32	140	0.23	11.15	6.58	-12.74	14.22
pooled_3x2_0.02	0	0	1.07	2.78	1.47	1.47	-19.32	140	0.25	11.11	6.54	-12.78	14.25
triangle_3x3_0.03	0	0	1.07	2.77	1.46	1.46	-19.32	140	0.36	10.96	6.49	-12.83	14.29
triangle_3x2_0.03	0	0	1.06	2.87	1.47	1.47	-19.32	140	0.24	11.06	6.48	-12.84	14.32
triangle_2x2_0.02	0	0	1.07	2.81	1.47	1.47	-19.32	140	0.24	11.03	6.45	-12.88	14.35
triangle_2x3_0.01	0	0	1.09	2.74	1.47	1.47	-19.32	140	0.26	11.00	6.43	-12.89	14.36
pooled_2x2_0.01	0	0	1.07	2.82	1.47	1.47	-19.32	140	0.24	11.00	6.41	-12.91	14.38
pooled_2x2_0.03	0	0	1.09	2.76	1.48	1.48	-19.32	140	0.23	11.02	6.42	-12.90	14.38
pooled_2x3_0.01	0	0	1.08	2.77	1.47	1.47	-19.32	140	0.25	10.98	6.40	-12.93	14.40
pooled_3x3_0.02	0	0	1.06	2.75	1.45	1.45	-19.32	140	0.24	10.96	6.37	-12.96	14.40
triangle_3x3_0.02	0	0	1.06	2.80	1.46	1.46	-19.32	140	0.25	10.96	6.37	-12.95	14.41
triangle_2x2_0.03	0	0	1.06	2.83	1.47	1.47	-19.32	140	0.24	10.97	6.37	-12.95	14.42
pooled_3x3_0.01	0	0	1.07	2.79	1.46	1.46	-19.32	140	0.24	10.95	6.35	-12.97	14.43
pooled_2x3_0.02	0	0	1.08	2.77	1.47	1.47	-19.32	140	0.25	10.94	6.35	-12.97	14.45
pooled_2x2_0.02	0	0	1.06	2.82	1.46	1.46	-19.32	140	0.23	10.94	6.33	-12.99	14.45
pooled_3x3_0.03	0	0	1.08	2.81	1.48	1.48	-19.32	140	0.24	10.94	6.35	-12.98	14.45
pooled_3x2_0.03	0	0	1.08	2.79	1.48	1.48	-19.32	140	0.24	10.94	6.34	-12.98	14.46
triangle_2x3_0.03	0	0	1.03	2.85	1.45	1.45	-19.32	140	0.24	10.90	6.30	-13.03	14.47
triangle_3x3_0.01	0	0	1.06	2.80	1.46	1.46	-19.32	140	0.24	10.84	6.23	-13.09	14.55
triangle_2x3_0.02	0	0	1.06	2.81	1.46	1.46	-19.32	140	0.23	10.85	6.23	-13.09	14.55
pooled_2x3_0.03	0	0	1.07	2.78	1.47	1.47	-19.32	140	0.24	10.80	6.19	-13.14	14.60

Nota: Elaboración propia.

Tabla 42

Comparación de resultados entre la sección 3 y la sección 4

	SECCIÓN 3						SECCIÓN 4						ΔE
	z (m)	x (m)	y (m)	V (m/s)	E. E. (m)	E. T. (m)	z (m)	x (m)	y (m)	V (m/s)	E. E. (m)	E. T. (m)	
total_7	-3.96	72	0.30	8.38	3.88	-0.08	-13.56	120	0.22	12.06	7.62	-5.94	5.85
escalones_2	-3.96	72	0.31	8.33	3.84	-0.12	-13.56	120	0.29	9.19	4.59	-8.97	8.86
escalones_3	-3.96	72	0.31	8.28	3.80	-0.16	-13.56	120	0.30	8.77	4.22	-9.34	9.19
escalones_6	-3.96	72	0.31	8.11	3.67	-0.29	-13.56	120	0.32	8.31	3.84	-9.72	9.43
escalones_1	-3.96	72	0.31	8.38	3.88	-0.08	-13.56	120	0.32	8.37	3.88	-9.68	9.60
escalones_5	-3.96	72	0.31	8.22	3.76	-0.20	-13.56	120	0.34	7.87	3.49	-10.07	9.87
triangle_2x2_0.01	-3.96	72	0.30	8.37	3.88	-0.08	-13.56	120	0.36	7.14	2.95	-10.61	10.52
triangle_3x2_0.03	-3.96	72	0.31	8.27	3.79	-0.17	-13.56	120	0.37	6.97	2.85	-10.71	10.54
triangle_3x2_0.02	-3.96	72	0.31	8.33	3.84	-0.12	-13.56	120	0.37	7.00	2.87	-10.69	10.58
triangle_3x2_0.01	-3.96	72	0.30	8.38	3.88	-0.08	-13.56	120	0.36	7.05	2.89	-10.67	10.59
triangle_2x2_0.02	-3.96	72	0.30	8.33	3.84	-0.12	-13.56	120	0.39	6.94	2.84	-10.72	10.60
escalones_4	-3.96	72	0.31	8.32	3.84	-0.12	-13.56	120	0.38	6.93	2.83	-10.73	10.61
pooled_3x2_0.01	-3.96	72	0.30	8.37	3.87	-0.09	-13.56	120	0.37	6.99	2.86	-10.70	10.61
pooled_3x2_0.02	-3.96	72	0.30	8.32	3.84	-0.12	-13.56	120	0.36	6.84	2.75	-10.81	10.69
pooled_3x2_0.03	-3.96	72	0.31	8.28	3.80	-0.16	-13.56	120	0.38	6.66	2.64	-10.92	10.76
triangle_2x2_0.03	-3.96	72	0.31	8.28	3.80	-0.16	-13.56	120	0.39	6.62	2.63	-10.93	10.77
pooled_2x2_0.03	-3.96	72	0.31	8.27	3.80	-0.16	-13.56	120	0.37	6.64	2.62	-10.94	10.78
triangle_3x3_0.03	-3.96	72	0.31	8.27	3.79	-0.17	-13.56	120	0.39	6.49	2.54	-11.02	10.85
pooled_3x3_0.02	-3.96	72	0.30	8.32	3.84	-0.12	-13.56	120	0.38	6.54	2.57	-10.99	10.87
pooled_2x2_0.02	-3.96	72	0.30	8.32	3.83	-0.13	-13.56	120	0.38	6.53	2.56	-11.00	10.88
triangle_3x3_0.02	-3.96	72	0.30	8.32	3.83	-0.13	-13.56	120	0.38	6.47	2.52	-11.04	10.91
pooled_2x3_0.01	-3.96	72	0.30	8.38	3.89	-0.07	-13.56	120	0.43	6.47	2.56	-11.00	10.93
pooled_3x3_0.01	-3.96	72	0.30	8.38	3.88	-0.08	-13.56	120	0.40	6.50	2.56	-11.00	10.93
pooled_3x3_0.03	-3.96	72	0.31	8.27	3.80	-0.16	-13.56	120	0.41	6.34	2.46	-11.10	10.94
triangle_2x3_0.03	-3.96	72	0.30	8.26	3.78	-0.18	-13.56	120	0.42	6.28	2.43	-11.13	10.96
pooled_2x3_0.03	-3.96	72	0.31	8.28	3.80	-0.16	-13.56	120	0.41	6.30	2.43	-11.13	10.97
pooled_2x3_0.02	-3.96	72	0.31	8.33	3.85	-0.11	-13.56	120	0.43	6.34	2.48	-11.08	10.97
triangle_2x3_0.02	-3.96	72	0.31	8.34	3.85	-0.11	-13.56	120	0.41	6.31	2.44	-11.12	11.01
triangle_3x3_0.01	-3.96	72	0.30	8.37	3.87	-0.09	-13.56	120	0.37	6.36	2.43	-11.13	11.04
triangle_2x3_0.01	-3.96	72	0.30	8.38	3.88	-0.08	-13.56	120	0.43	6.22	2.41	-11.15	11.07
pooled_2x2_0.01	-3.96	72	0.30	8.38	3.88	-0.08	-13.56	120	0.38	6.27	2.39	-11.17	11.10

Nota: Elaboración propia.

Tabla 43

Comparación de resultados entre la sección 4 y la sección 5

	SECCIÓN 4						SECCIÓN 5						ΔE
	z (m)	x (m)	y (m)	V (m/s)	E. E. (m)	E. T. (m)	z (m)	x (m)	y (m)	V (m/s)	E. E. (m)	E. T. (m)	
triangle_2x3_0.01	-13.56	120	0.43	6.22	2.41	-11.15	-19.32	140	0.26	11.00	6.43	-12.89	1.73
pooled_2x2_0.01	-13.56	120	0.38	6.27	2.39	-11.17	-19.32	140	0.24	11.00	6.41	-12.91	1.74
triangle_3x3_0.03	-13.56	120	0.39	6.49	2.54	-11.02	-19.32	140	0.36	10.96	6.49	-12.83	1.81
pooled_3x3_0.03	-13.56	120	0.41	6.34	2.46	-11.10	-19.32	140	0.24	10.94	6.35	-12.98	1.87
pooled_2x3_0.02	-13.56	120	0.43	6.34	2.48	-11.08	-19.32	140	0.25	10.94	6.35	-12.97	1.89
triangle_2x3_0.03	-13.56	120	0.42	6.28	2.43	-11.13	-19.32	140	0.24	10.90	6.30	-13.03	1.89
escalones_6	-13.56	120	0.32	8.31	3.84	-9.72	-19.32	140	0.22	12.13	7.71	-11.61	1.90
triangle_3x3_0.02	-13.56	120	0.38	6.47	2.52	-11.04	-19.32	140	0.25	10.96	6.37	-12.95	1.91
pooled_2x3_0.01	-13.56	120	0.43	6.47	2.56	-11.00	-19.32	140	0.25	10.98	6.40	-12.93	1.93
triangle_3x3_0.01	-13.56	120	0.37	6.36	2.43	-11.13	-19.32	140	0.24	10.84	6.23	-13.09	1.96
pooled_2x2_0.03	-13.56	120	0.37	6.64	2.62	-10.94	-19.32	140	0.23	11.02	6.42	-12.90	1.96
pooled_3x3_0.02	-13.56	120	0.38	6.54	2.57	-10.99	-19.32	140	0.24	10.96	6.37	-12.96	1.96
pooled_3x3_0.01	-13.56	120	0.40	6.50	2.56	-11.00	-19.32	140	0.24	10.95	6.35	-12.97	1.97
escalones_4	-13.56	120	0.38	6.93	2.83	-10.73	-19.32	140	0.24	11.19	6.62	-12.70	1.97
triangle_2x3_0.02	-13.56	120	0.41	6.31	2.44	-11.12	-19.32	140	0.23	10.85	6.23	-13.09	1.97
pooled_3x2_0.02	-13.56	120	0.36	6.84	2.75	-10.81	-19.32	140	0.25	11.11	6.54	-12.78	1.97
pooled_2x2_0.02	-13.56	120	0.38	6.53	2.56	-11.00	-19.32	140	0.23	10.94	6.33	-12.99	1.98
triangle_3x2_0.01	-13.56	120	0.36	7.05	2.89	-10.67	-19.32	140	0.24	11.23	6.66	-12.66	1.99
pooled_2x3_0.03	-13.56	120	0.41	6.30	2.43	-11.13	-19.32	140	0.24	10.80	6.19	-13.14	2.00
triangle_2x2_0.03	-13.56	120	0.39	6.62	2.63	-10.93	-19.32	140	0.24	10.97	6.37	-12.95	2.02
triangle_2x2_0.01	-13.56	120	0.36	7.14	2.95	-10.61	-19.32	140	0.24	11.24	6.67	-12.65	2.04
triangle_3x2_0.02	-13.56	120	0.37	7.00	2.87	-10.69	-19.32	140	0.23	11.15	6.58	-12.74	2.05
pooled_3x2_0.01	-13.56	120	0.37	6.99	2.86	-10.70	-19.32	140	0.24	11.14	6.56	-12.76	2.06
pooled_3x2_0.03	-13.56	120	0.38	6.66	2.64	-10.92	-19.32	140	0.24	10.94	6.34	-12.98	2.06
triangle_3x2_0.03	-13.56	120	0.37	6.97	2.85	-10.71	-19.32	140	0.24	11.06	6.48	-12.84	2.13
triangle_2x2_0.02	-13.56	120	0.39	6.94	2.84	-10.72	-19.32	140	0.24	11.03	6.45	-12.88	2.16
escalones_5	-13.56	120	0.34	7.87	3.49	-10.07	-19.32	140	0.24	11.48	6.95	-12.37	2.30
escalones_1	-13.56	120	0.32	8.37	3.88	-9.68	-19.32	140	0.23	11.66	7.17	-12.16	2.48
escalones_3	-13.56	120	0.30	8.77	4.22	-9.34	-19.32	140	0.23	11.80	7.33	-11.99	2.65
escalones_2	-13.56	120	0.29	9.19	4.59	-8.97	-19.32	140	0.23	11.89	7.44	-11.88	2.91
total_7	-13.56	120	0.22	12.06	7.62	-5.94	-19.32	140	0.21	13.01	8.84	-10.48	4.55

Nota: Elaboración propia.

CONCLUSIONES

Se concluye que, en términos de disipación de energía total del vertedero y a partir de la simulación computacional mediante el uso de modelos de turbulencia RANS de 30 variantes geométricas del vertedero de la represa Coltani, se ha podido definir que el modelo pooled_2x3_0.03, el cual añade al tercer tramo del vertedero 9 escalones con posa de disipación rectangular de 20 cm de base y 30 cm de altura en cada borde de escalón y un alto de escalón de 30 cm, es aquel que mayor disipación de energía presenta, habiendo disipado 17.65 % más energía que el vertedero original de manera global. Por otro lado, el modelo pooled_2x2_0.01, el cual añade al tercer tramo del vertedero 9 escalones con posa de disipación rectangular de 20 cm de base y 20 cm de altura en cada borde de escalón y un alto de escalón de 10 cm, es el que mayor disipación de energía presenta en el tramo escalonado, habiendo disipado 47.29 % más energía en comparación con el modelo original.

Además, se determinó que, la introducción de una zona escalona dentro del vertedero de la represa Coltani aumenta la disipación de la energía de la estructura. Así, considerando el número de escalones y basado en los resultados de 6 simulaciones, se puede decir que, en todos los modelos con tipología de escalón regular, aquellos con mayor número de escalones presentaron mejores cualidades de disipación de energía, sobre todo cuando el régimen del flujo es de tipo rasante, siendo los casos de mayor alto de escalón aquellos donde esta diferencia no es tan marcada por encontrarse en un régimen saltante.

Así mismo, se evidencio que, considerando la altura de los escalones y según los resultados obtenidos de 6 simulaciones, para los casos con escalones de tipología regular, la altura del escalón es un factor fundamental para definir si el flujo es saltante o rasante, siendo que para los casos con altura de escalón de 10 cm y 20 cm el flujo es rasante, mientras que para los casos de altura de escalón de 30 cm es flujo es saltante. Según lo expuesto, se pudo definir que, para flujos de tipo rasante, entre menor sea la altura de escalón mayor será la disipación de energía.

Por otro lado, además de los modelos con escalones regulares, también se han simulado modelos de vertederos escalonados con tipología de tipo poza rectangular y poza triangular. Del análisis de estas tipologías especiales, se concluye que, comparados con su contraparte regular y a partir de los resultados de 9 simulaciones, los escalones de tipo poza rectangular son lo que mejores características presentan en términos de disipación de energía, seguidos por los escalones con pozas triangulares. Además, se ha observado que lo descrito anteriormente

es más notorio para aquellos casos donde la altura de escalón es de 10 cm, esta diferencia se reduce para los escalones de 20 cm de altura y finalmente se hace indistinguible para el caso de escalones de 30 cm de altura. Este fenómeno se explica por la transición del flujo rasante al flujo saltante, lo que conlleva un cambio en los mecanismos de disipación de energía.

Adicionalmente, de estas tipologías especiales, se estudiaron los efectos que tendrían las dimensiones de las pozas sobre el comportamiento del flujo y la energía disipada final. Es así que, a partir de los resultados de 16 simulaciones computacionales, segregados en grupos con tipo de escalón y alto de escalón similar, no se pudo encontrar una correlación entre la variación de dimensiones, como base y altura de poza, y la disipación de energía, ya que para cada grupo la disipación de energía es estadísticamente la misma y aparentemente independiente de las dimensiones de las pozas.

De la misma forma que para los escalones regulares, se evaluó también el efecto del alto de escalón en las tipologías especiales sobre la disipación de la energía, para esto se compararon los resultados de 24 simulaciones computacionales agrupadas en 8 grupos con la misma geometría de escalón, pero con alto de escalón variable. Los resultados mostraron que no se puede determinar una correlación entre el alto del escalón y la disipación de la energía para ninguno de los grupos mencionados, siendo la disipación similar para cada grupo evaluado. Esta relación se explicaría por la presencia de zonas de recirculación altamente aireadas aguas debajo de los escalones, propio de un régimen saltante en un vertedero escalonado.

Finalmente, se determinó que, si bien la introducción de una geometría escalonada en el tramo central del vertedero genera una considerable disipación de energía, la presencia inmediata de dos tramos de rápidas luego del tramo escalonado hace que este efecto se vea reducido, ya que la pendiente de fricción en los últimos tramos es menor para todos los casos con respecto al modelo original. Esto último se explica debido a que la menor velocidad de entrada tiende a querer estabilizarse hacia la velocidad normal correspondiente a la sección, pendiente y caudal de estos tramos.

RECOMENDACIONES

En concordancia con los resultados obtenidos, se recomienda la incorporación de tramos escalonados en aquellas estructuras de demasías que requieran aumentar sus capacidades de disipación de energía, eligiendo para ellas una tipología de escalón regular cuando la reducción requerida sea menor, y una tipología de escalón con pozas rectangulares cuando se requiera un aumento más significativo de la disipación de energía.

A pesar de haberse encontrado que los escalones de tipo poza rectangular son los que mejor disipan la energía, se recomienda hacer una evaluación considerando el acero de refuerzo en los elementos de concreto armado a partir de los resultados del campo de presiones desarrollados en la cara aguas arriba de las pozas, para evaluar los esfuerzos generados con respecto a los que se generan en una poza de tipo rectangular, y definir si este ligero aumento en la disipación es producente con respecto al aumento de concreto armado.

Con el objetivo de ampliar y contrastar las conclusiones determinadas, se recomienda simular escenarios adicionales considerando: un mayor y menor número de escalones, alturas de escalón menores a 10 cm y mayores a 30 cm y un caudal variable del caudal de diseño. Con la finalidad de complementar y ratificar las conclusiones presentadas, además de poder determinar reglas que demarquen el paso de un régimen de flujo saltante a un régimen de flujo rasante, que es el que finalmente define el mecanismo de disipación de energía.

Al respecto de la ubicación del tramo escalonado, se recomienda plantear escenarios geométricos donde el tramo escalonado se encuentre en el tramo inmediatamente anterior de la poza de disipación, y determinar si de esta manera se puede obtener un mejor aprovechamiento de las propiedades de disipación de energía del tramo escalonado, habiéndose observado que, al ubicarse en el tramo central y ser seguido por canales de gran pendiente, sus efectos se reducen significativamente. Además, se recomienda modelar un vertedero que sea enteramente escalonado que se acomode a la topografía de la represa Coltani para evaluar si es una mejor alternativa. hidráulica y económica que el vertedero actual.

Finalmente, al respecto del uso de simulaciones computacionales basados en modelos de turbulencia RANS para futuras investigaciones, se recomienda siempre ejecutar: la validación experimental del modelo, el análisis del modelo de turbulencia, el análisis de sensibilidad de la malla, el análisis de estabilidad estadística y el análisis de influencia de la extensión del dominio computacional; para que los resultados obtenidos sean consistentes con los principios de la mecánica de fluidos y tengan validez hidráulica.

REFERENCIAS

- Almeland, S. K., Mukha, T., & Bensow, R. E. (2021). An improved air entrainment model for stepped spillways. *Applied Mathematical Modelling*, 100, 170–191. <https://doi.org/10.1016/J.APM.2021.07.016>
- Anderson, J. D. (1995). *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. https://books.google.com.pe/books/about/Computational_Fluid_Dynamics.html?id=phG_QgAACAAJ&redir_esc=y
- Aras, E., & Berkun, M. (2010). Comparison of stepped and smooth spillway effects on stream reaeration. *Water SA*, 36(3), 309–314.
- Autoridad Nacional del Agua. (2015). *Política y estrategia nacional de recursos hídricos*.
- Autoridad Nacional del Agua. (2019). *Reglamento de seguridad de presas públicas de embalse de agua*.
- Bedregal Guevara, A. D., & Yana De La Riva, W. A. (2019). *Análisis del campo de presiones en vertederos de perfil tipo Creager en el departamento de Arequipa*. Universidad Católica de Santa María.
- Bennett, P., Chesterton, J., Neeve, D., Ucuncu, M., Wearing, M., & Jones, S. E. L. (2018). Use of CFD for modelling spillway performance. *Dams and Reservoirs*, 28(2), 62–72. <https://doi.org/10.1680/JDARE.18.00001>
- Boes, R. M., & Hager, W. H. (2003a). Hydraulic Design of Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(9), 671–679. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2003\)129:9\(671\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2003)129:9(671))
- Boes, R. M., & Hager, W. H. (2003b). Two-Phase Flow Characteristics of Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(9), 661–670. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2003\)129:9\(661\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2003)129:9(661))
- Boulange, J., Hanasaki, N., Yamazaki, D., & Pokhrel, Y. (2021). Role of dams in reducing global flood exposure under climate change. *Nature Communications* 2021 12:1, 12(1), 417-. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-20704-0>
- Boussinesq, J. (1897). Theorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section. *Mémoires Présentés Par Divers Savans à l'Académie Royaledes Sciences de l'Institut de France* 23, 94.
- British Dam Society. (2020). *Types of Dam*. <https://britishdams.org/about-dams/dam-information/types-of-dam/>
- Bureau of Reclamation. (1987). *Design of small dams* (Third Edition).
- Bureau of Reclamation. (2022). *Design Standards No. 14; Appurtenant Structures for Dams (Spillways and Outlet Works) Design Standard*.
- Cáceres Rodríguez, D. B. (2021). *Análisis del Comportamiento Hidráulico de Aliviaderos en Laberinto Ubicado en la Ciudad de Arequipa*. Universidad Católica de Santa María.
- Caretto, L. S., Gosman, A. D., Patankar, S. V., & Spalding, D. B. (1973). Two calculation procedures for steady, three-dimensional flows with recirculation. *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, 60–68.

<https://doi.org/10.1007/BFB0112677>

- Ccanccapa Surco, J. fermin, & Phoco Taco, V. F. (2021). *Comportamiento Hidráulico Experimental del Coeficiente de Descarga en Aliviaderos Tipo Teclas de Piano*. Universidad Nacional de San Agustín.
- Çengel, Y. A. ., & Cimbala, J. M. . (2006). *Fluid mechanics : fundamentals and applications*. McGraw Hill.
- Chamani, M. R., & Rajaratnam, N. (1994). Jet Flow on Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 120(2), 254–259. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(1994\)120:2\(254\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1994)120:2(254))
- Chanson, H. (1994a). *Hydraulics of Nappe Flow Regime above Stepped Chutes and Spillways. The University of Queensland*.
- Chanson, H. (1994b). *Hydraulics of Stepped Spillways and Cascades. University of Queensland*. <https://staff.civil.uq.edu.au/h.chanson/reprints/ieaut94a.pdf>
- Chanson, H. (2002). *Hydraulics of Stepped Chutes and Spillways. Taylor & Francis*. https://books.google.com/books/about/Hydraulics_of_Stepped_Chutes_and_Spillwa.html?hl=fr&id=eSUnKqw4jPgC
- Chanson, H. (2011). History of stepped channels and spillways: a rediscovery of the “wheel.” *Https://Doi.Org/10.1139/L95-034*, 22(2), 247–259. <https://doi.org/10.1139/L95-034>
- Chanson, H. (2022). Energy dissipation on stepped spillways and hydraulic challenges—Prototype and laboratory experiences. *Journal of Hydrodynamics*, 34(1), 52–62. <https://doi.org/10.1007/S42241-022-0005-8/METRICS>
- Chanson, H., & Toombes, L. (2002). Air–water flows down stepped chutes: turbulence and flow structure observations. *International Journal of Multiphase Flow*, 28(11), 1737–1761. [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(02\)00089-7](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(02)00089-7)
- Chen, Y., Liu, G., Qian, S., Xu, H., Feng, J., & Wang, X. (2022). Effects of Converging Sidewalls on Skimming Flow over Converging Stepped Spillway. *Applied Sciences (Switzerland)*, 12(15). <https://doi.org/10.3390/APP12157868>
- Chien, K. Y. (2012). Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model. *Https://Doi.Org/10.2514/3.51043*, 20(1), 33–38. <https://doi.org/10.2514/3.51043>
- Chow, V. T. (1959). *Open Channel Hydraulics*. In McGraw-Hill. <https://www.scirp.org/reference/referencespapers?referenceid=1929585>
- Conley, R., Delaney, T. J., & Jiao, X. (2020). A hybrid method and unified analysis of generalized finite differences and Lagrange finite elements. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 376(2), 112862. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2020.112862>
- Damarneegara, S., Wardoyo, W., Perkins, R., & Vincens, E. (2020). Computational fluid dynamics (CFD) simulation on the hydraulics of a spillway. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 437(1). <https://doi.org/10.1088/1755-1315/437/1/012007>
- Díaz Vilca, E. P., & Morales Pino, J. M. (2021). *Análisis del Comportamiento Hidráulico de Vertederos de Perfil Tipo Creager Empleando Modelos Numéricos CFD en OpenFOAM*.

Universidad Católica de Santa María.

- Felder, S., Guenther, P., & Chanson, H. (2012). *Air-water flow properties and energy dissipation on stepped spillways: a physical study of several pooled stepped configurations*. <https://doi.org/10.14264/283261>
- Flores Arana, S. M. (2019). *Modelamiento Hidráulico de Vertederos Tipo Tecla de Piano*. Universidad Católica de Santa María.
- Ghimire, S. N., & Schulenberg, J. W. (2022). Impacts of Climate Change on the Environment, Increase in Reservoir Levels, and Safety Threats to Earthen Dams: Post Failure Case Study of Two Cascading Dams in Michigan. *Civil and Environmental Engineering*, 0(0). <https://doi.org/10.2478/CEE-2022-0053>
- Harlow, F. H., & Welch, J. E. (1965). Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Physics of Fluids*, 8(12), 2182–2189. <https://doi.org/10.1063/1.1761178>
- Hekmatzadeh, A. A., Papari, S., & Amiri, S. M. (2017). Investigation of Energy Dissipation on Various Configurations of Stepped Spillways Considering Several RANS Turbulence Models. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 2(42), 97–109. <https://doi.org/10.1007/S40996-017-0085-9>
- Hinds, J. (1926). Side Channel Spillways: Hydraulic Theory, Economic Factors, and Experimental Determination of Losses. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 89(1), 881–927. <https://doi.org/10.1061/taceat.0003601>
- Hirsch, C. (2007). Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, 1–656. <https://doi.org/10.1016/B978-0-7506-6594-0.X5037-1>
- Issa, R. I. (1986). Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62(1), 40–65. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90099-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9)
- Jahad, U. A., Al-Ameri, R., & Das, S. (2022). Investigations of velocity and pressure fluctuations over a stepped spillway with new step configuration. *Water Supply*, 22(7), 6321–6337. <https://doi.org/10.2166/WS.2022.242>
- Jasak, H. (1996). *Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows*. [Imperial College London]. <http://hdl.handle.net/10044/1/8335>
- Jasak, H. (2009). OpenFOAM: Open source CFD in research and industry. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, 1(2), 89–94. <https://doi.org/10.2478/IJNAOE-2013-0011>
- Jimenez Motta, J. V. (2019). *Evaluación del Funcionamiento Hidráulico del Aliviadero de la Presa Gallito Ciego Mediante Modelación Numérica Tridimensional*. Universidad Nacional Agraria La Molina.
- Kaouachi, A., Gafsi, M., Carvalho, R. F., Lopes, P., & Benmamar, S. (2021). Numerical investigation of alternating skimming flow over a stepped spillway. *Water Supply*, 21(7), 3837–3859. <https://doi.org/10.2166/WS.2021.141>

- Kármán, T. von. (1930). Mechanische Aenlichkeit und Turbulenz. *Nachrichten von Der Gesellschaft Der Wissenschaften Zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1930, 58–76.
- Katz, A., & Sankaran, V. (2011). Mesh quality effects on the accuracy of CFD solutions on unstructured meshes. *Journal of Computational Physics*, 230(20), 7670–7686. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.06.023>
- Launder, B. E., Reece, G. J., & Rodi, W. (1975). Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*, 68(3), 537–566. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001814>
- Launder, B. E., & Spalding, D. B. (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(2), 269–289. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90029-2)
- Lejeune, A., Lejeune, M., & Lacroix, F. (1994). Study of skimming flow over stepped spillways. *Proc., Int. Conf. on Modelling, Testing and Monitoring for Hydro Powerplants*.
- LeVeque, R. J. (2007). Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- Li, Z., & Lal, R. (2023). An Evaluation of Accuracy and Efficiency of a 3D Adaptive Mesh Refinement Method with Analytical Velocity Fields. *https://doi.org/10.1142/S0219876223410013*, 21(10), 2341001. <https://doi.org/10.1142/S0219876223410013>
- Magel Pereira, G. (2020). *Spillway Design - Step by step*. Taylor & Francis Group.
- Menter, F. R. (1993). Zonal two equation κ - ω turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA 23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference*, 1993. <https://doi.org/10.2514/6.1993-2906>
- Patankar, S. V., & Spalding, D. B. (1972). A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(10), 1787–1806. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(72\)90054-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(72)90054-3)
- Pavlov, V. (2022). Spillway design guide . *FCERM Research & Development Programme*. www.gov.uk/environment-agency
- Petheram, C., & McMahon, T. A. (2019). Dams, dam costs and damnable cost overruns. *Journal of Hydrology X*, 3, 100026. <https://doi.org/10.1016/J.HYDROA.2019.100026>
- Prandtl, L. (1925). Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 5(2), 136–139. <https://doi.org/10.1002/ZAMM.19250050212>
- Quispe Riveros, C. A., & Villagra Ambrancio, A. J. (2020). *Análisis Hidráulico Experimental en Aliviaderos de Perfil Tipo Creager*. Universidad Nacional de San Agustín.
- Rajaratnam, N. (1990). Skimming Flow in Stepped Spillways. *Journal of Hydraulic Engineering*, 116(4), 587–591. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1990\)116:4\(587\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1990)116:4(587))

- Ramarao, V. S., Reddy, M. G. M., & Sahu, K. C. (2023). Optimization of hydraulic design of approach channel of spillway by hydraulic model studies. *Journal of Engineering and Applied Science* 2023 70:1, 70(1), 136-. <https://doi.org/10.1186/s44147-023-00282-w>
- Roache, P. J. (1998). Verification of Codes and Calculations. <https://doi.org/10.2514/2.457>, 36(5), 696–702. <https://doi.org/10.2514/2.457>
- Ruff, J. F., & Ward, J. P. (2002). *Hydraulic Design of Stepped Spillways*.
- Salcedo Mendoza Ferdinand. (2017). *Investigación del Comportamiento Hidraulico del Coeficiente de Descarga de Vertederos de Flujo Libre*. Universidad Nacional de San Agustín.
- Saleh, S. M., Muhammad, S. H., & Abo, A. A. (2022). Effect Of Pooled and Flat Stepped Spillway on Energy Dissipation Using Computational Fluid Dynamics. *Tikrit Journal of Engineering Sciences*, 29(2), 75–79. <https://doi.org/10.25130/TJES.29.2.9>
- Salmasi, F., & Abraham, J. (2022). Effect of slope on energy dissipation for flow over a stepped spillway. *Water Supply*, 22(5), 5056–5069. <https://doi.org/10.2166/WS.2022.193>
- Schleiss, A. J., Erpicum, S., & Matos, J. (2023). Advances in Spillway Hydraulics: From Theory to Practice. *Water* 2023, Vol. 15, 15(12). <https://doi.org/10.3390/w15122161>
- Schwarze, R. (2013). CFD-Modellierung: Grundlagen und Anwendungen bei Strömungsprozessen. *CFD-Modellierung*. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-24378-3>
- Simões, A. L. A., Schulz, H. E., & De Melo Porto, R. (2010). Stepped and smooth spillways: Resistance effects on stilling basin lengths. *Journal of Hydraulic Research*, 48(3), 329–337. <https://doi.org/10.1080/00221686.2010.481853>
- Singh, V. P., & Vimal, S. (2022). A Unified Framework for Governing Equations of Hydrologic Flows. *Journal of Hydrologic Engineering*, 27(1). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.0002150](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0002150)
- Smagorinsky, J. (1963). General Circulation Experiments with the Primitive Equations. *Monthly Weather Review*, 91(3), 164. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1963\)091](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091)
- Spalart, P. R., & Allmaras, S. R. (1994). One-equation turbulence model for aerodynamic flows. *Recherche Aéronautique*, 1, 5–21. <https://doi.org/10.2514/6.1992-439>
- Spalding, D. B. (1961). A Single Formula for the “Law of the Wall.” *Journal of Applied Mechanics*, 28(3), 455–458. <https://doi.org/10.1115/1.3641728>
- Stephenson, D. (1991). Energy dissipation down stepped spillways. *International Water Power & Dam Construction*.
- Stretz Ramos, C. J. (2021). *Modelamiento Hidráulico a Máxima Avenida del Aliviadero de Demásías de la Represa de Condoroma - Arequipa*. Universidad Nacional de San Agustín.
- Tabari, H. (2020). Climate change impact on flood and extreme precipitation increases with water availability. *Scientific Reports*, 10(1), 1–10. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-70816-2>
- Taylor, G. I. (1935). Statistical theory of turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 151(873), 421–444. <https://doi.org/10.1098/rspa.1935.0158>

- Tongkratoke, A., Chinnarasri, C., Pornprommin, A., Dechaumphai, P., & Juntasaro, V. (2009). Non-linear turbulence models for multiphase recirculating free-surface flow over stepped spillways. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 23(5), 401–409. <https://doi.org/10.1080/10618560902886882>
- U.S. Army Corps of Engineers. (1990). *Hydraulic Design of Spillways*.
- Universidad Católica de Santa María. (2024). Código de ética para la investigación y la integridad científica. *Vicerrectorado de Investigación*.
- US Army Corps of Engineers. (2018). *Hydrologic Engineering Requirements for Reservoirs*.
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method. *Pearson Education*.
- Vivarelli, G., Qin, N., & Shahpar, S. (2025). A Review of Mesh Adaptation Technology Applied to Computational Fluid Dynamics. *Fluids* 2025, Vol. 10, 10(5). <https://doi.org/10.3390/fluids10050129>
- Wan, H., Li, R., Gualtieri, C., Yang, H., & Feng, J. (2017). Numerical Simulation of Hydrodynamics and Reaeration over a Stepped Spillway by the SPH Method. *Water* 2017, Vol. 9, Page 565, 9(8), 565. <https://doi.org/10.3390/W9080565>
- Weller, H. G., Tabor, G., Jasak, H., & Fureby, C. (1998). A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in Physics*, 12(6), 620–631. <https://doi.org/10.1063/1.168744>
- White, F. M., & Xue, H. (2016). *Fluid Mechanics* (8th ed.). McGraw-Hill.
- Wilcox, D. C. (1988). Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *https://doi.org/10.2514/3.10041*, 26(11), 1299–1310. <https://doi.org/10.2514/3.10041>
- Wilcox, D. C. (2006). Turbulence Modeling for CFD. *DCW Industries*, 1, 2006. <http://www.amazon.com/Turbulence-Modeling-CFD-Third-Edition/dp/1928729088>

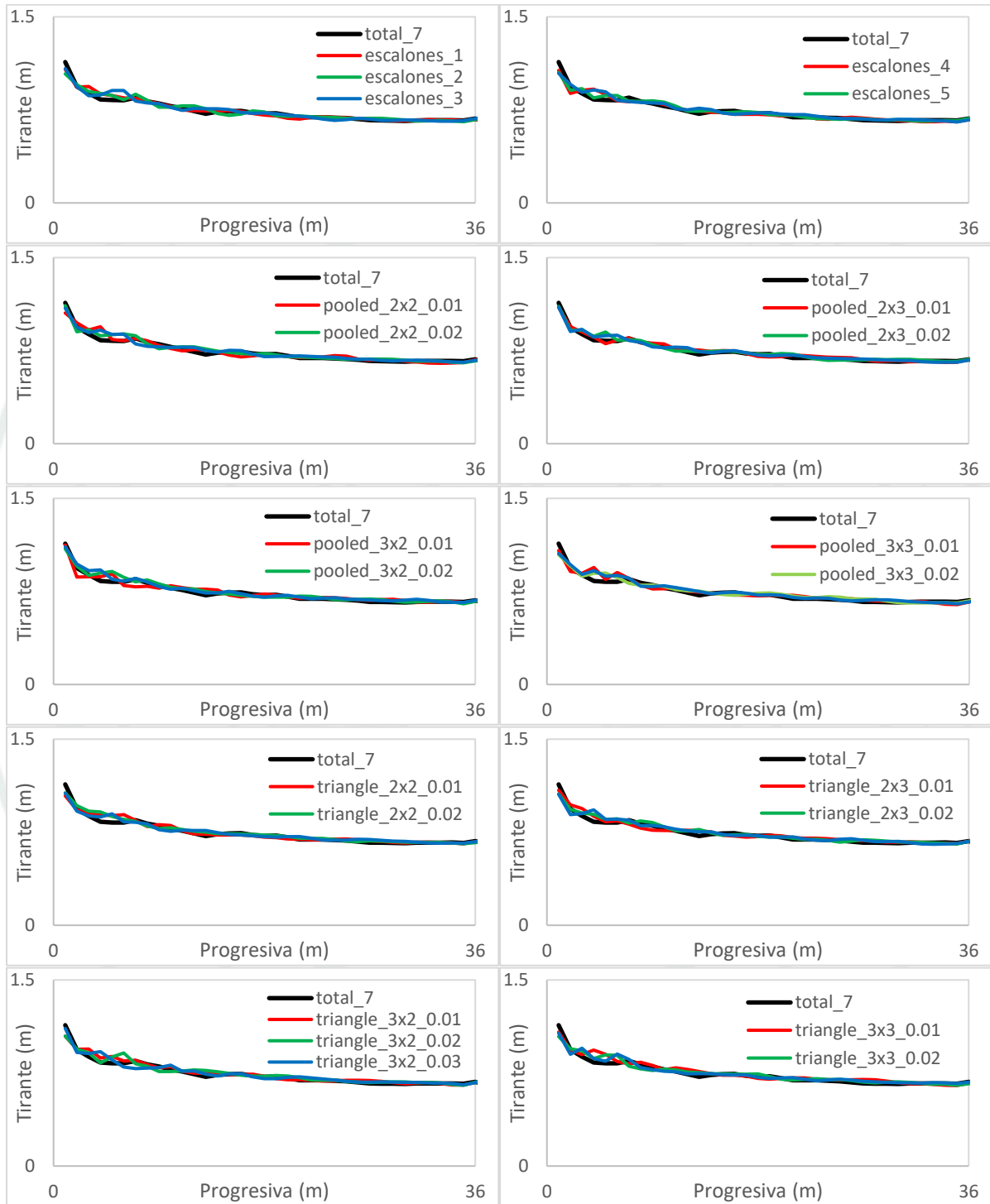
ANEXOS



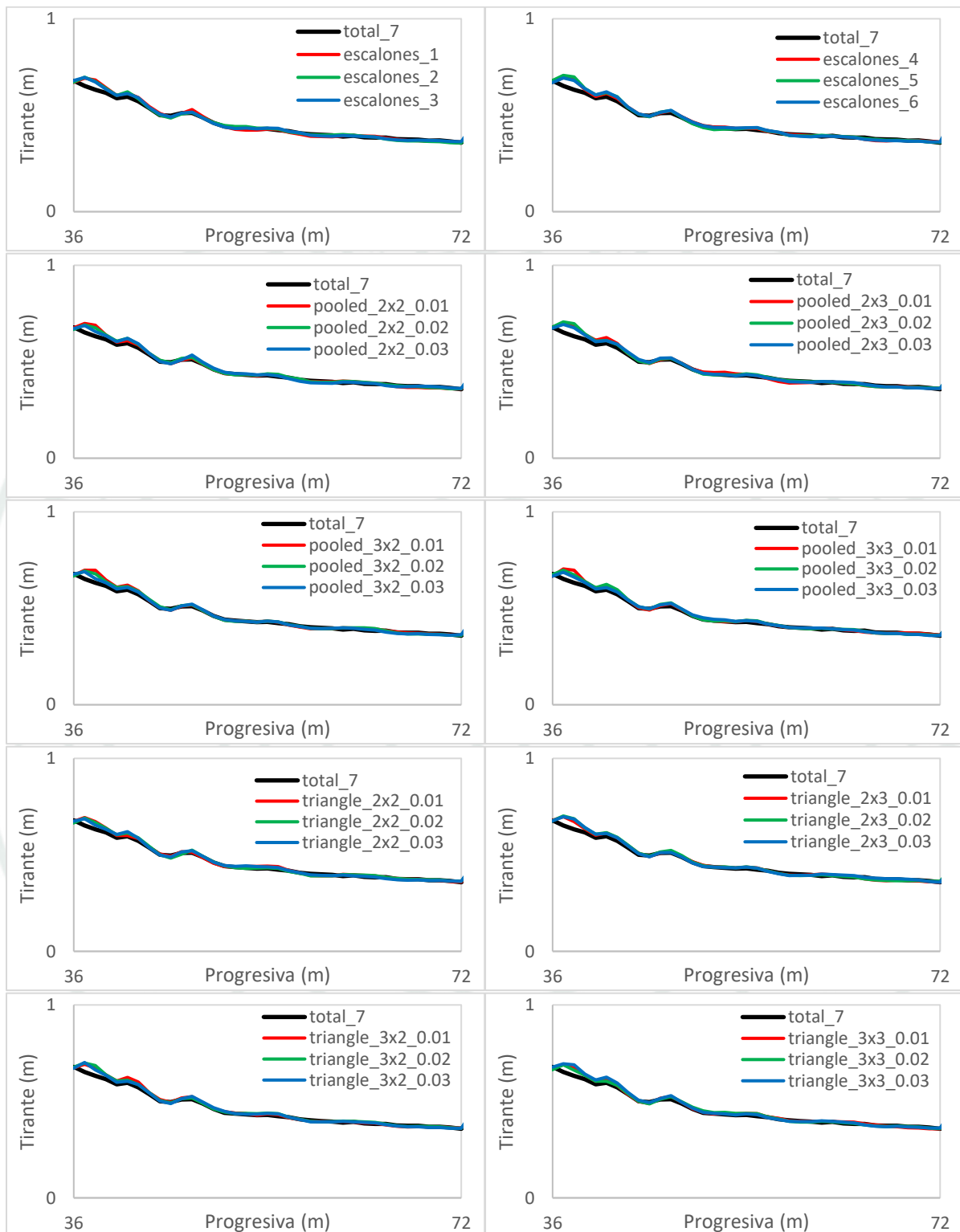
Anexo 1

Tirantes promedios

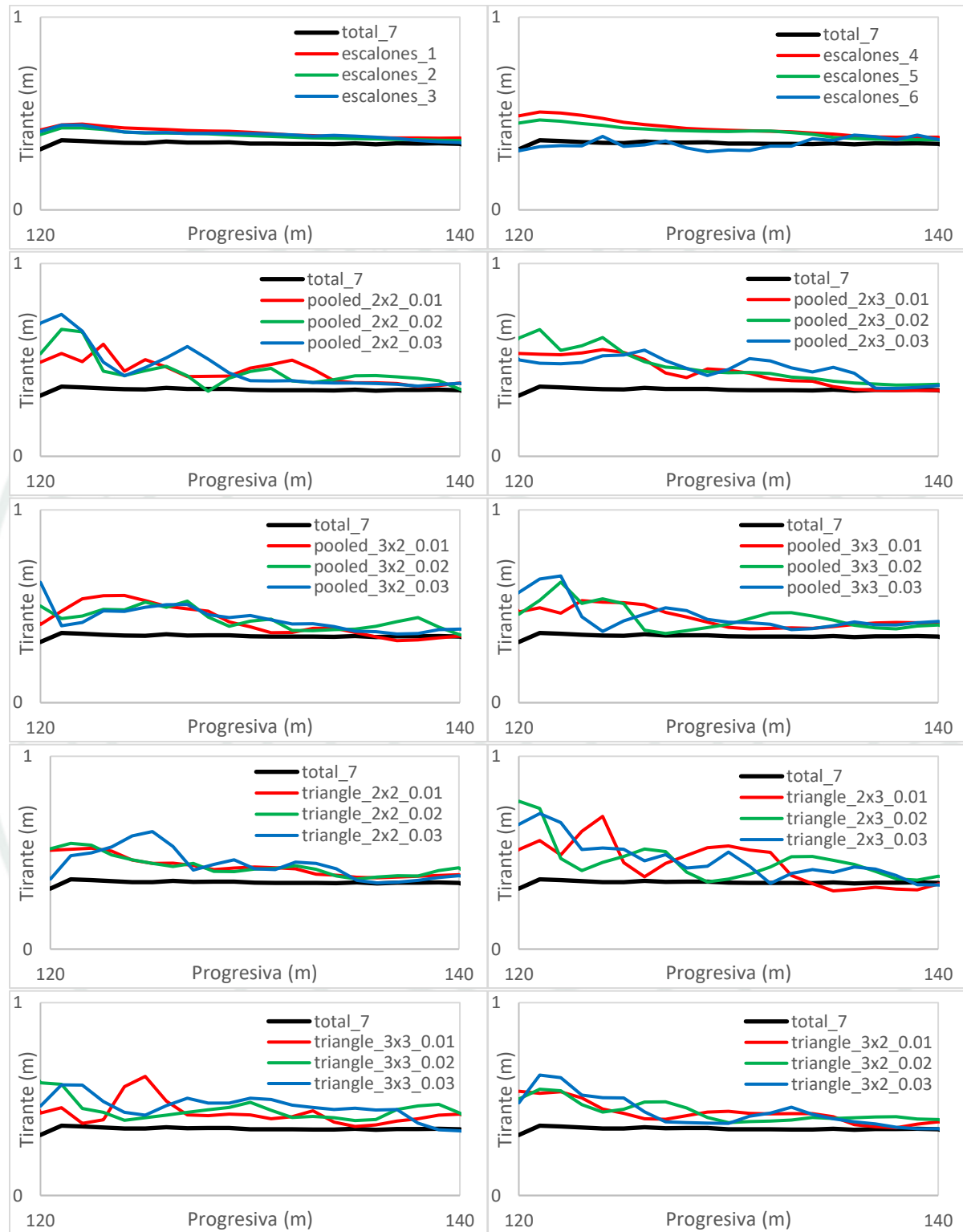
Tirantes promedio en la sección 1



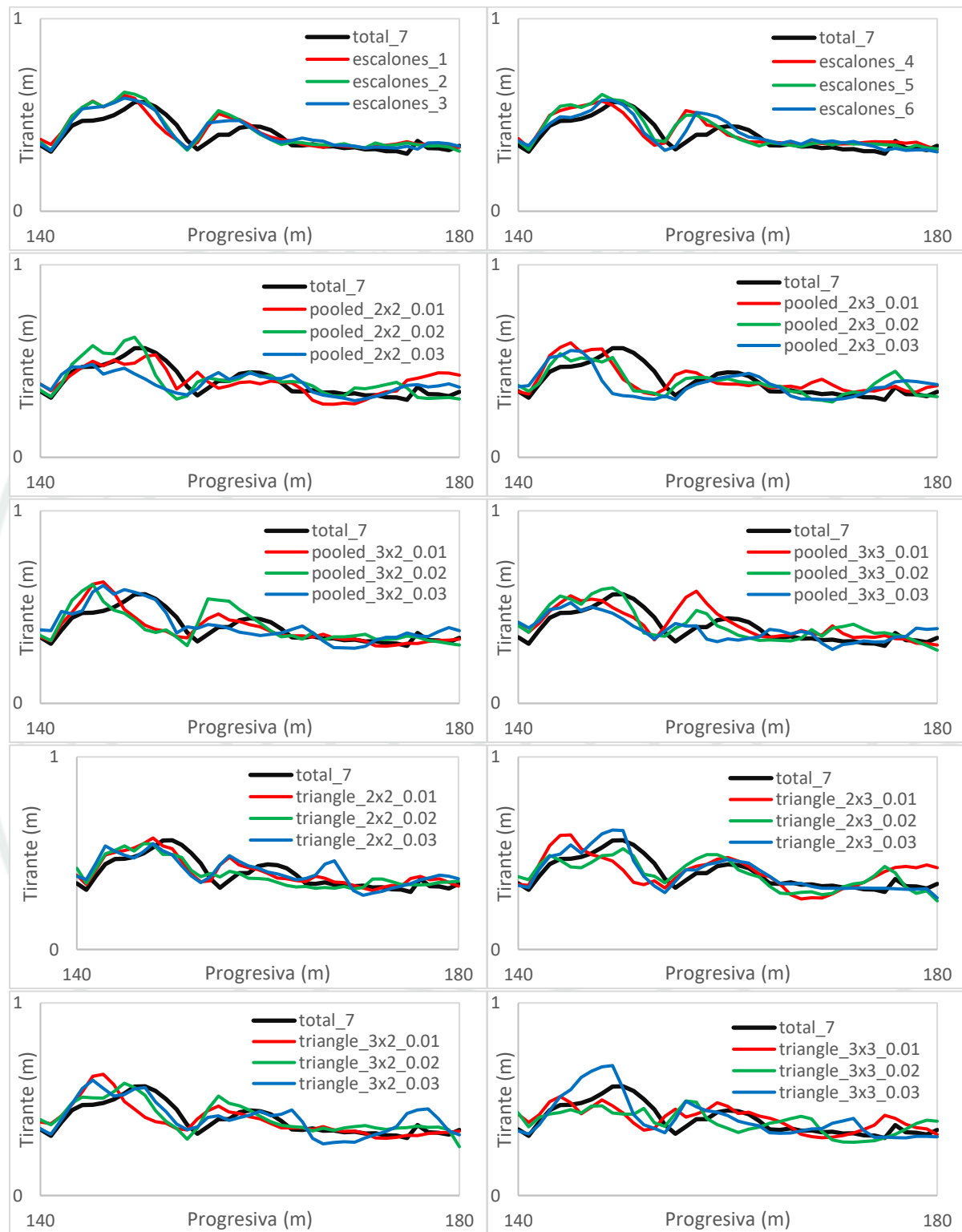
Tirantes promedio en la sección 2



Tirantes promedio en la sección 4



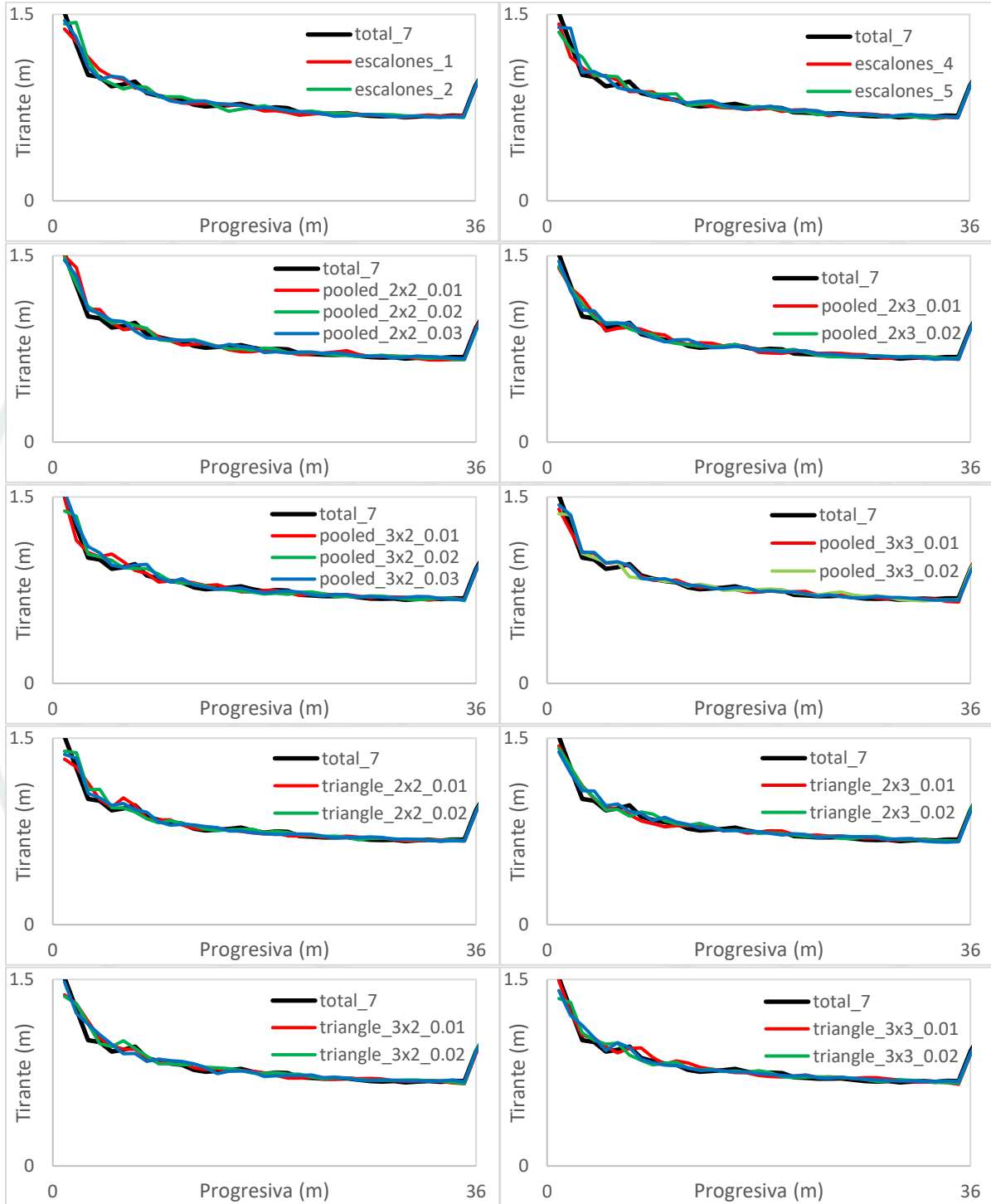
Tirantes promedio en la sección 5



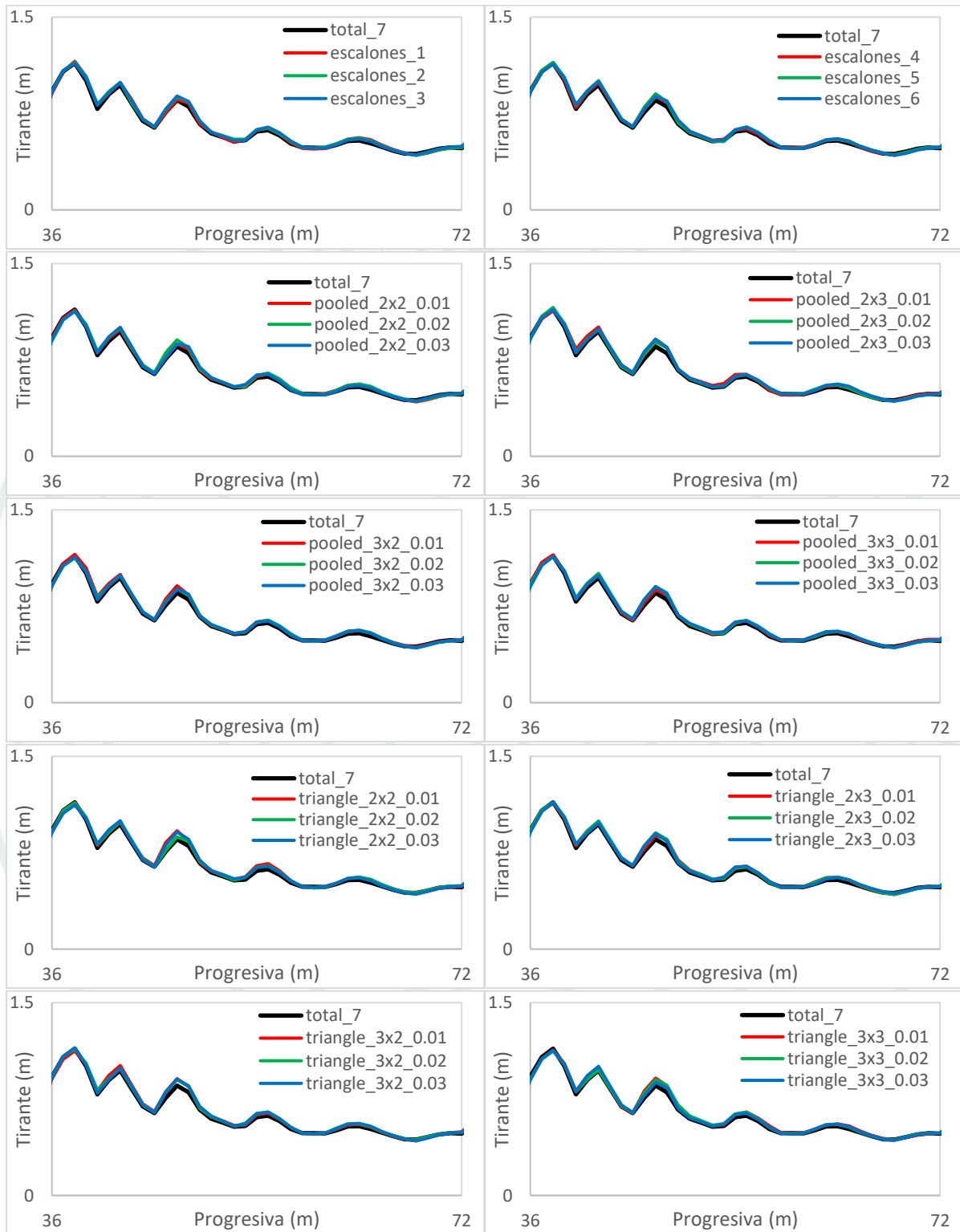
Anexo 2

Tirantes máximos

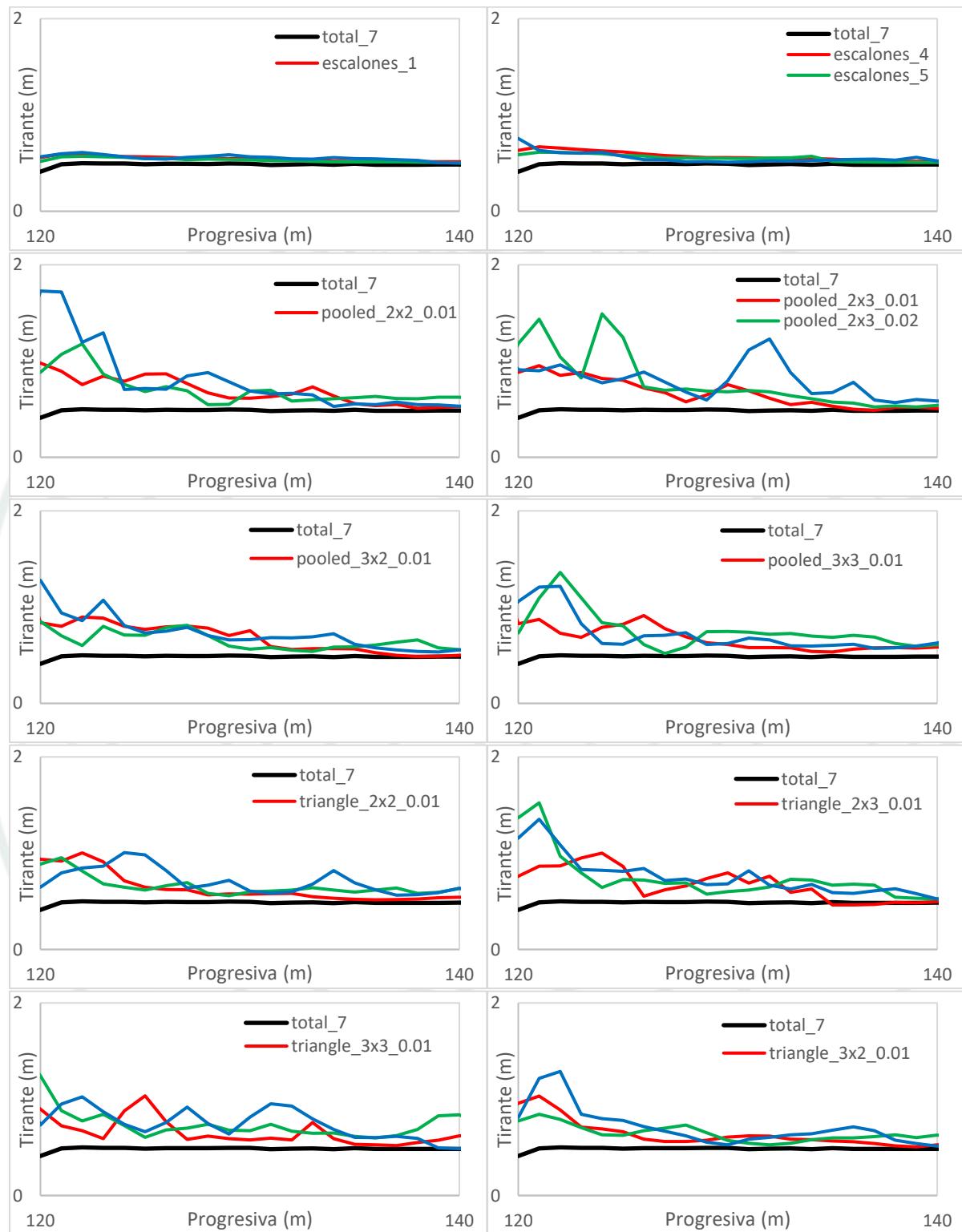
Tirantes máximos en la sección 1



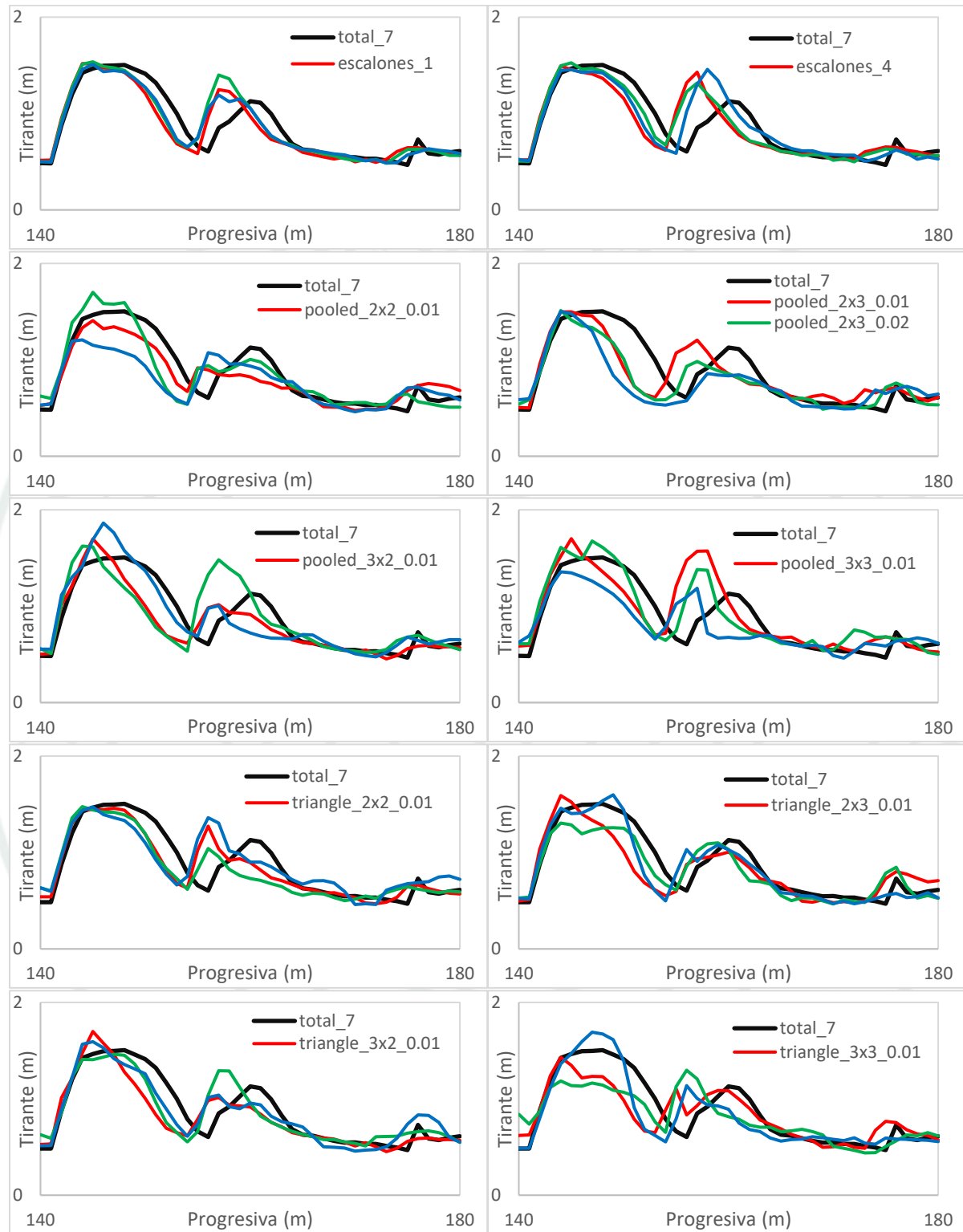
Tirantes máximos en la sección 2



Tirantes máximos en la sección 4



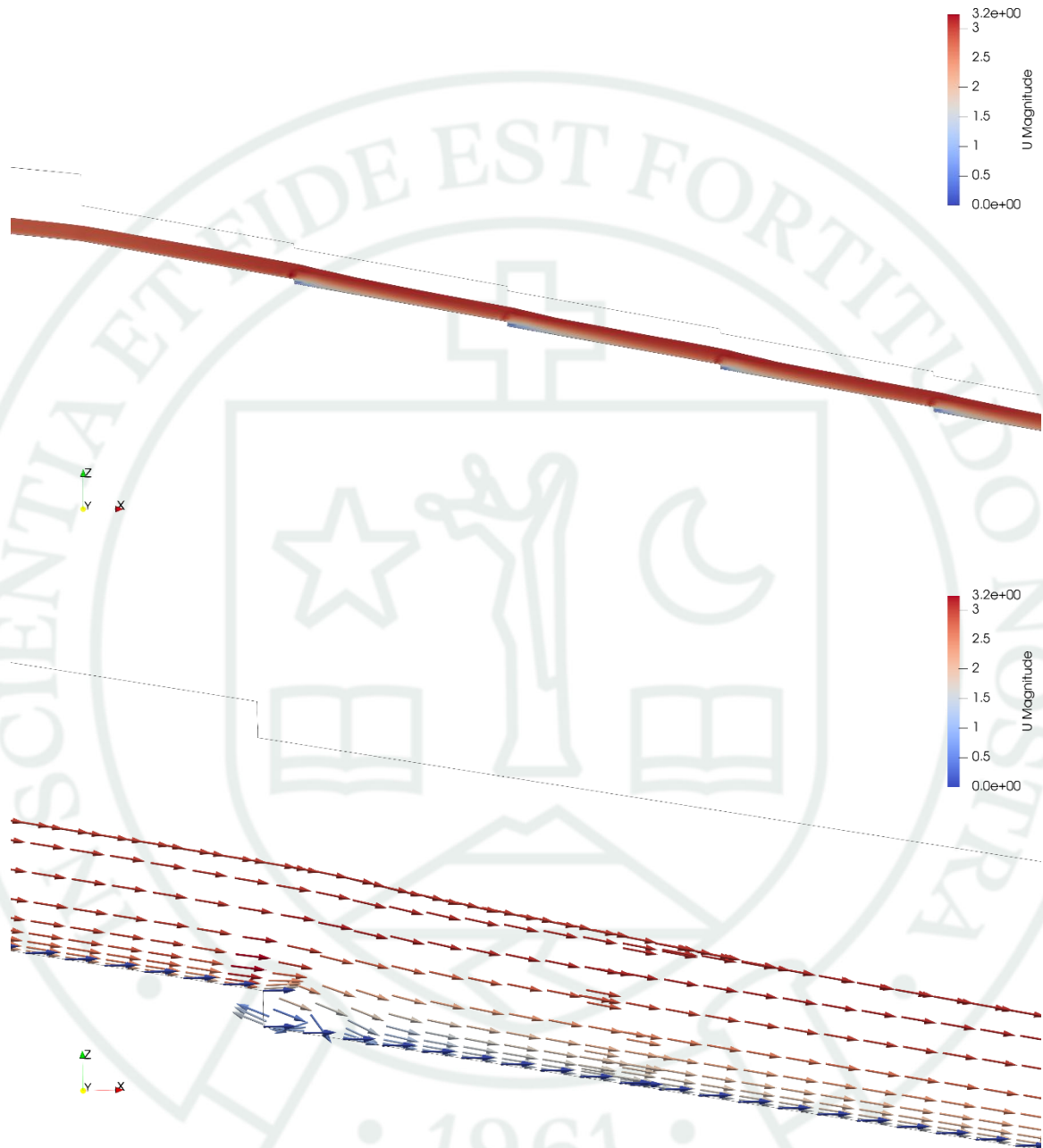
Tirantes máximos en la sección 5



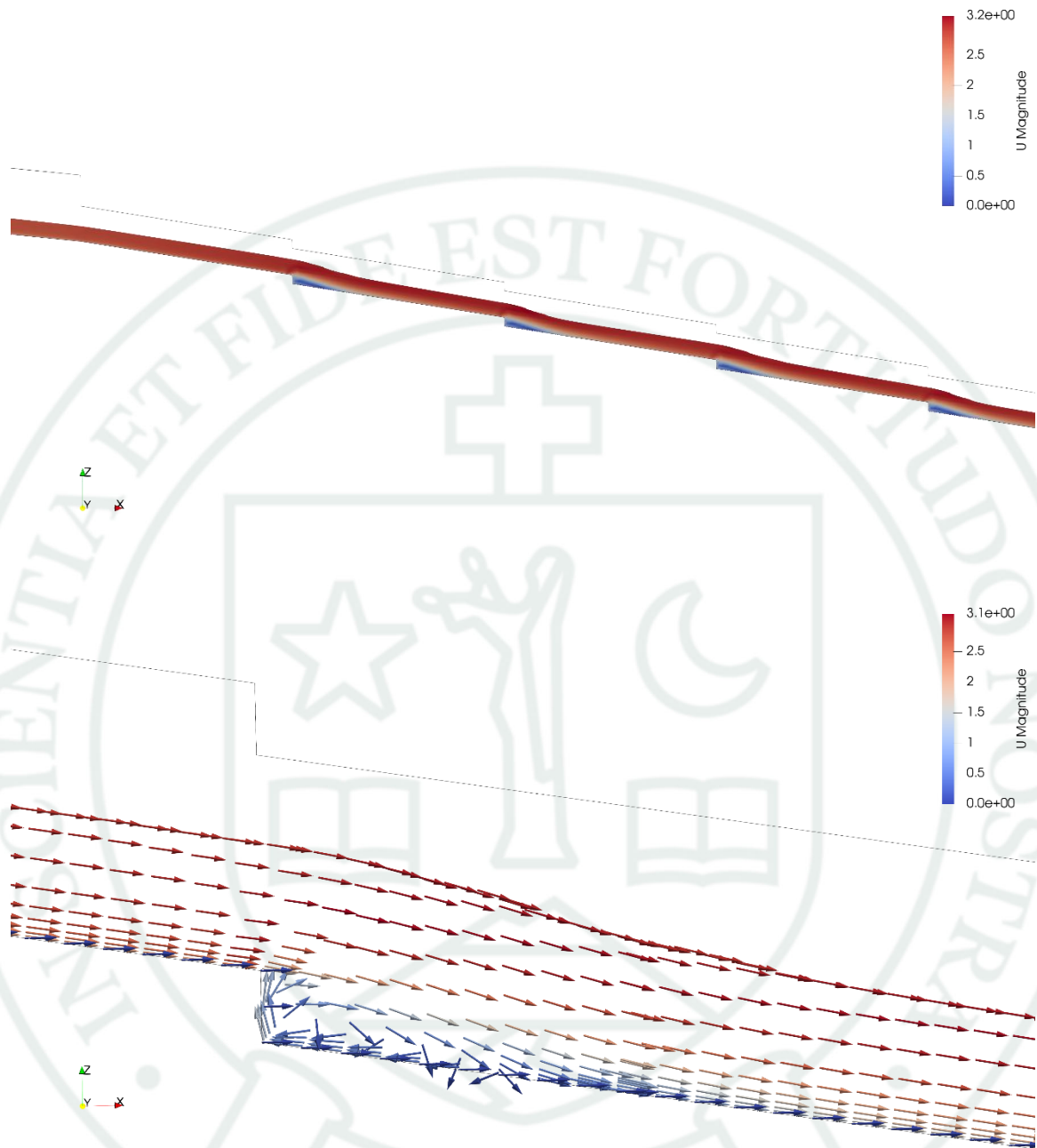
Anexo 3

Resultados del comportamiento del flujo

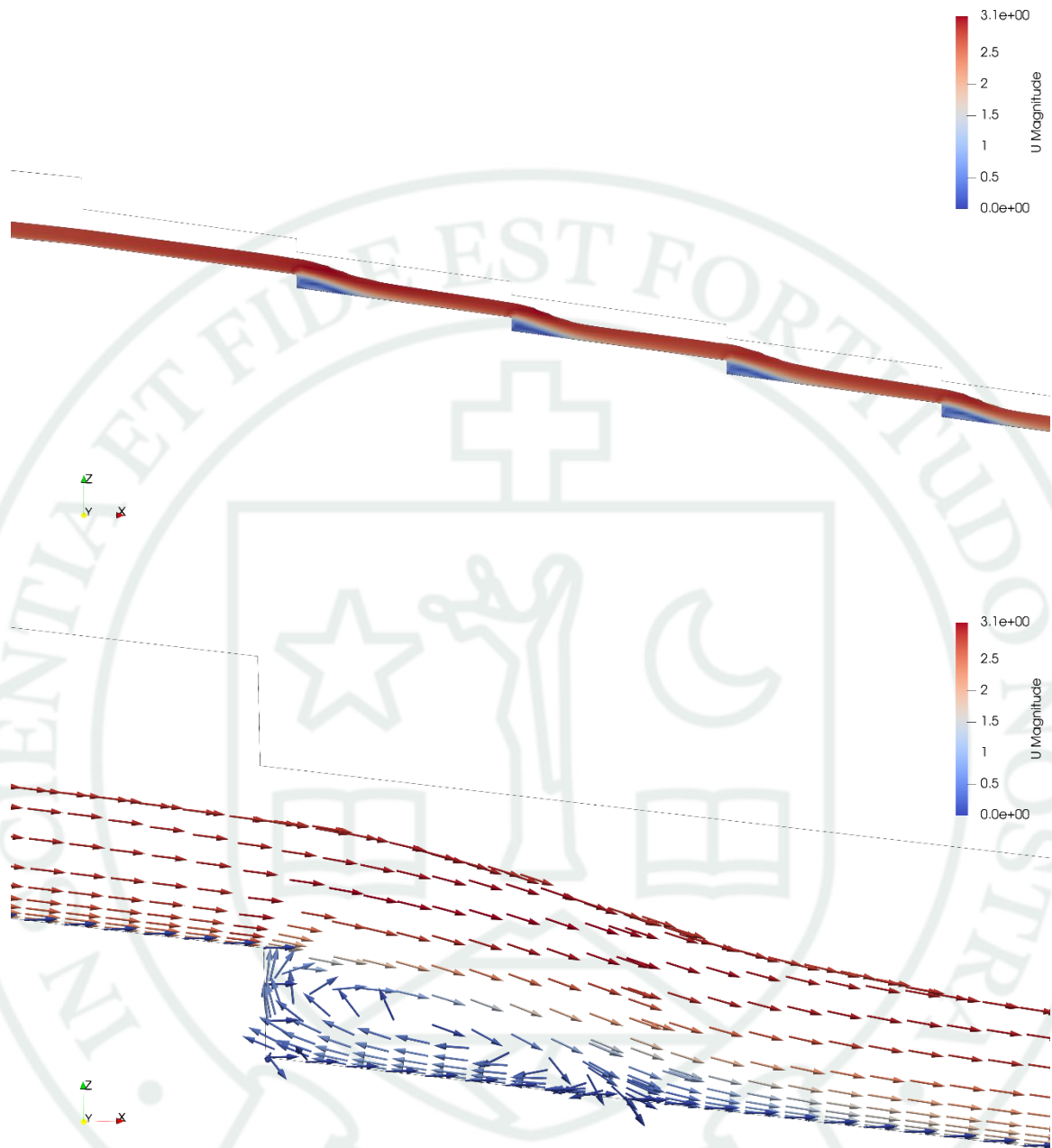
Modelo: escalones_1



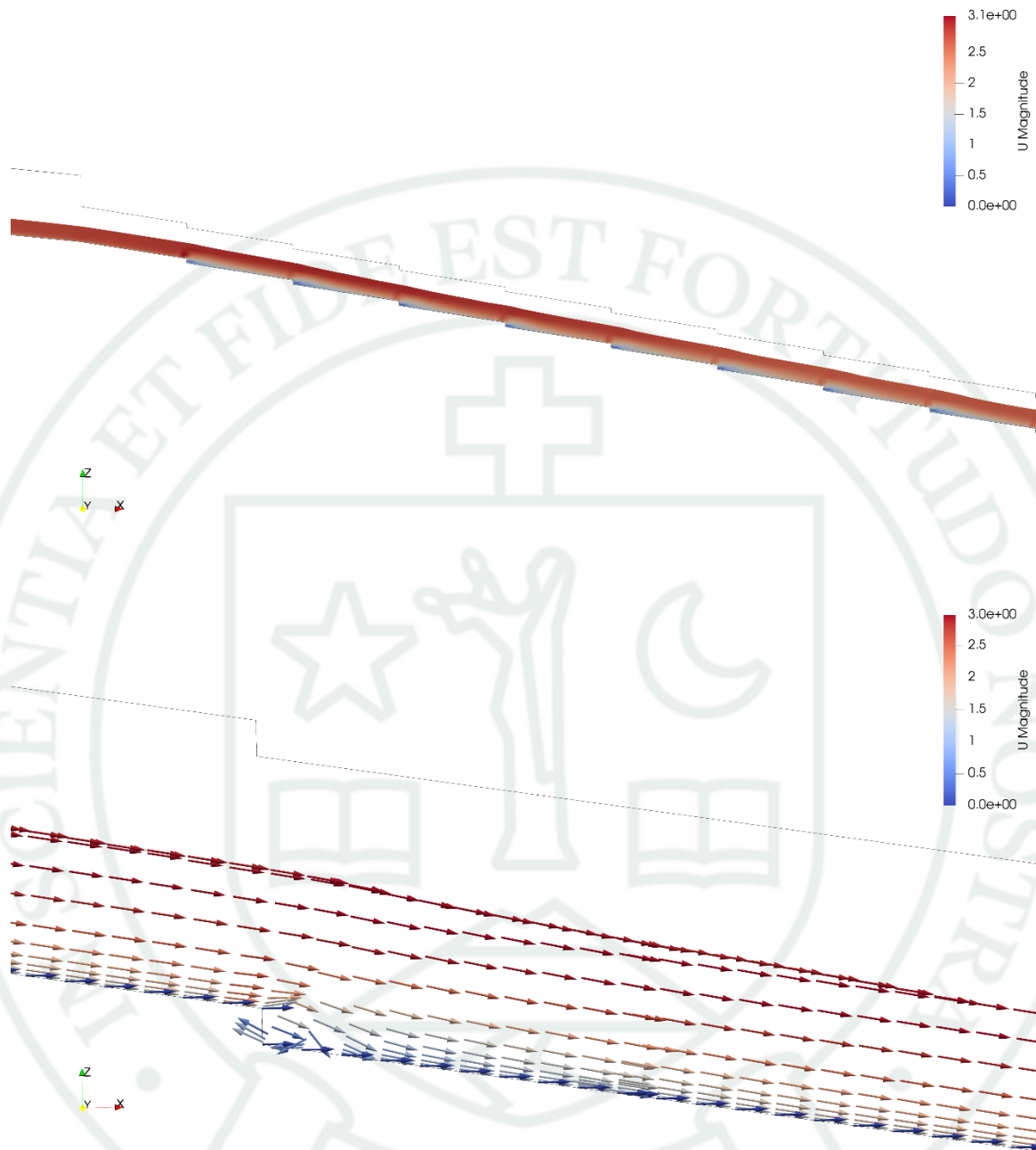
Modelo: escalones_2



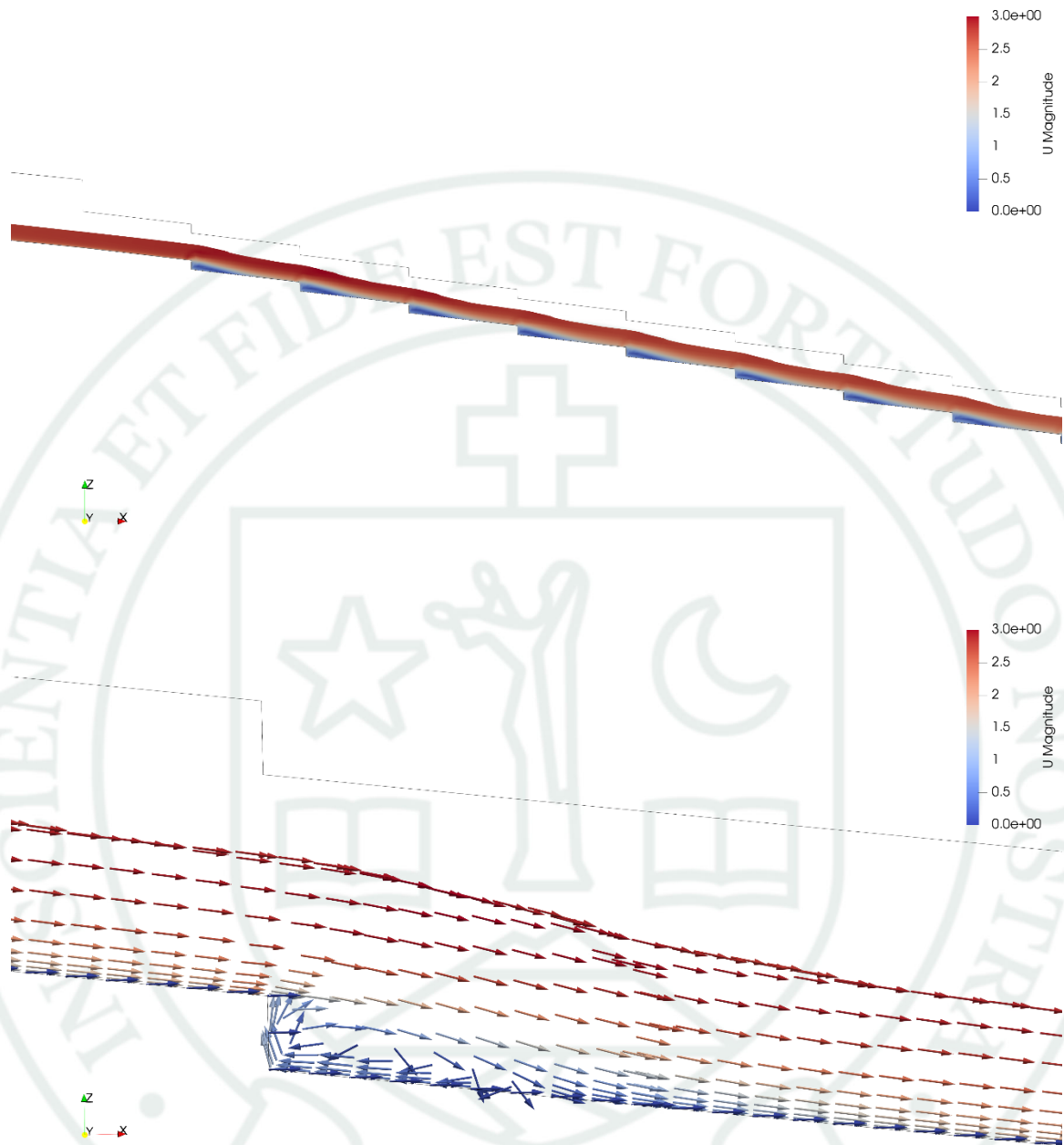
Modelo: escalones_3



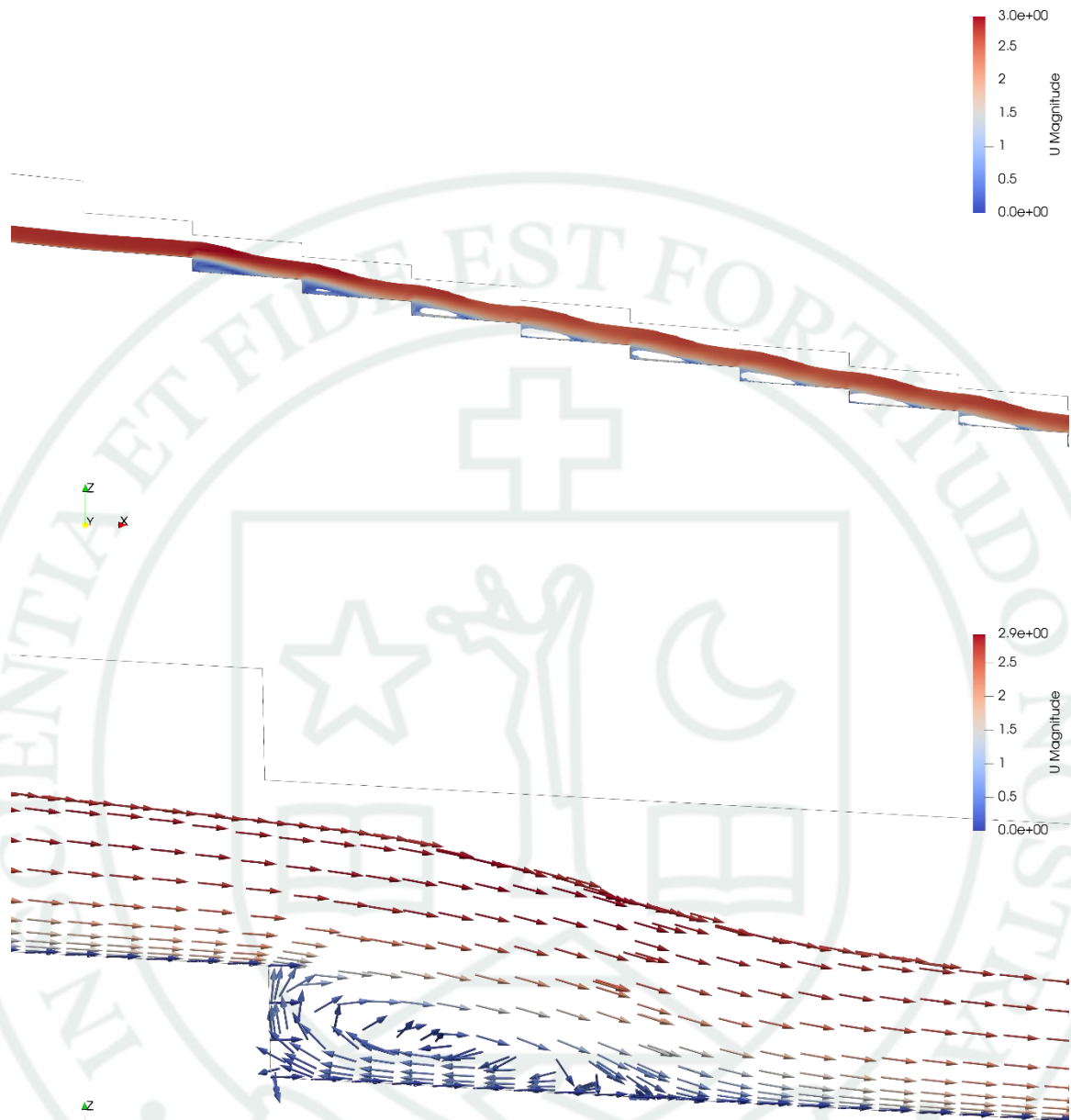
Modelo: escalones_4



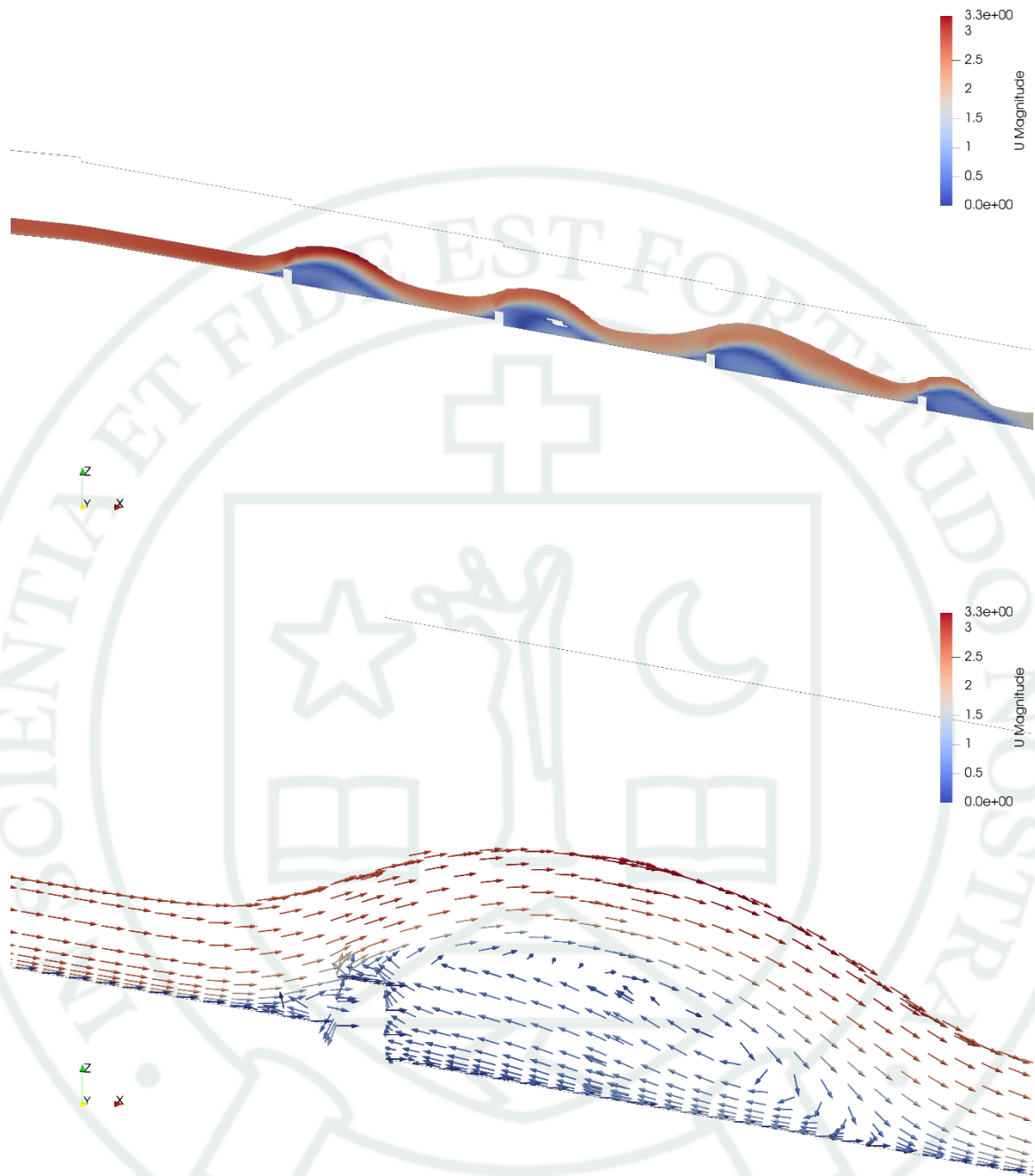
Modelo: escalones_5



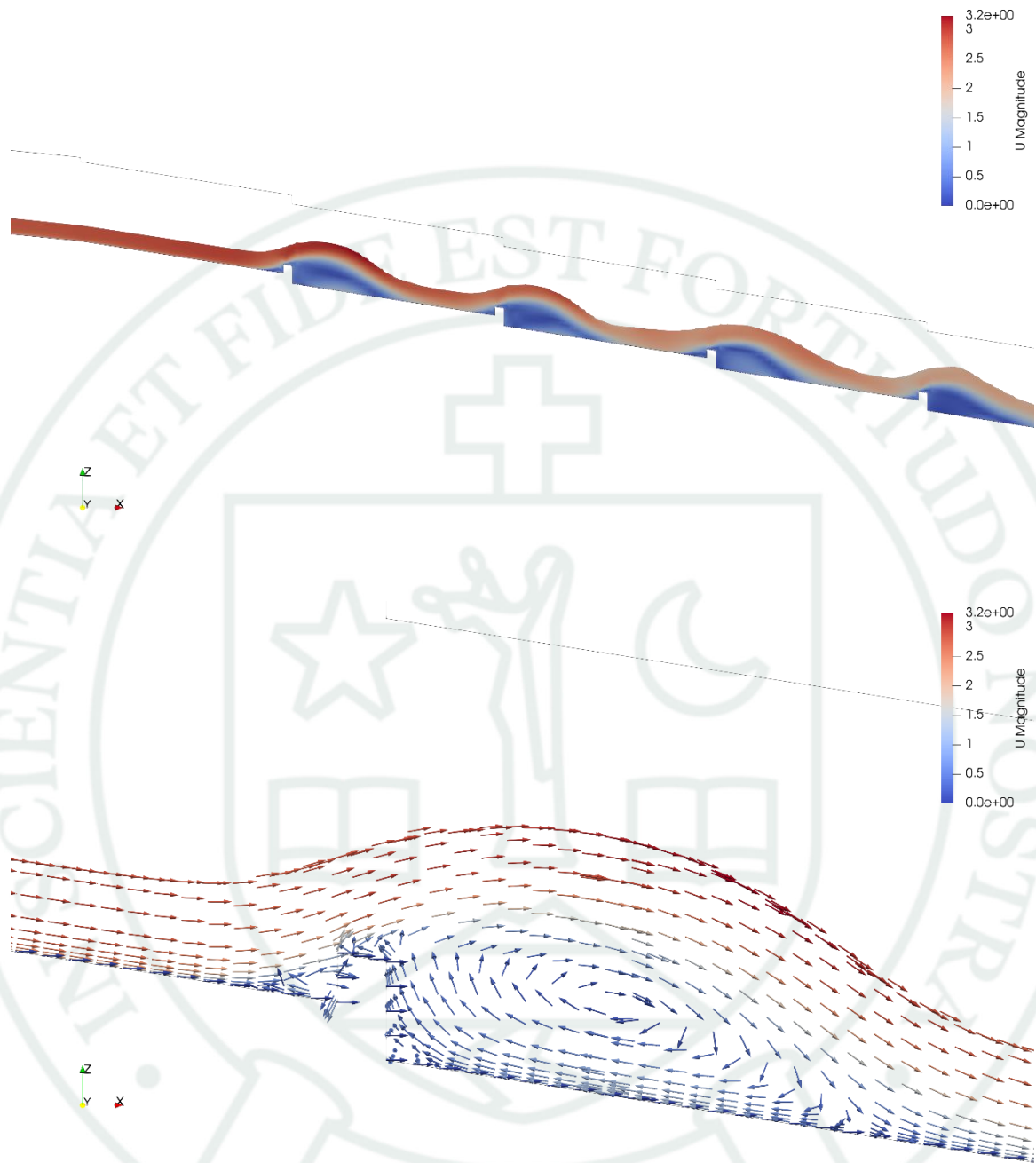
Modelo: escalones_6



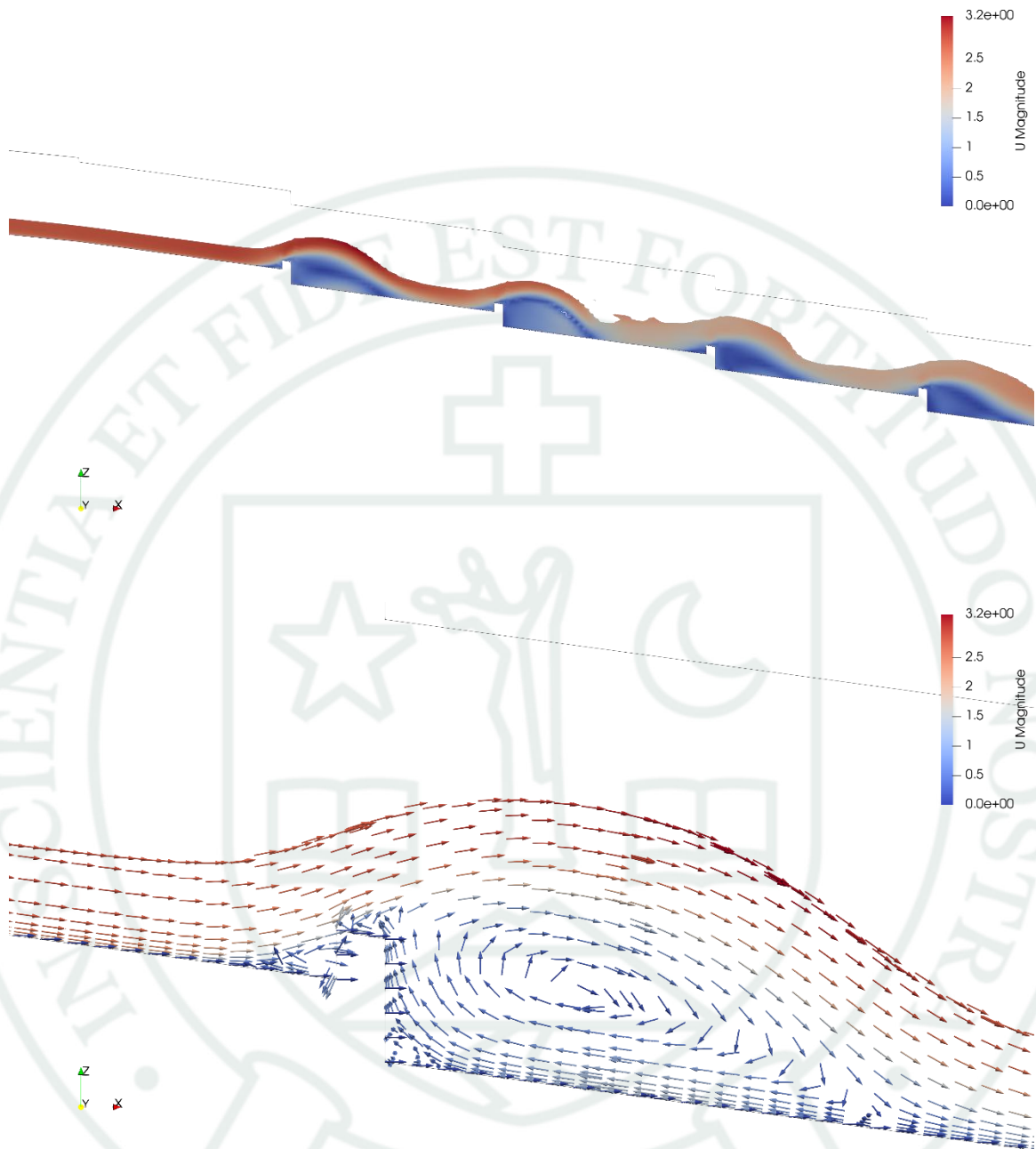
Modelo: pooled_2x2_0.01



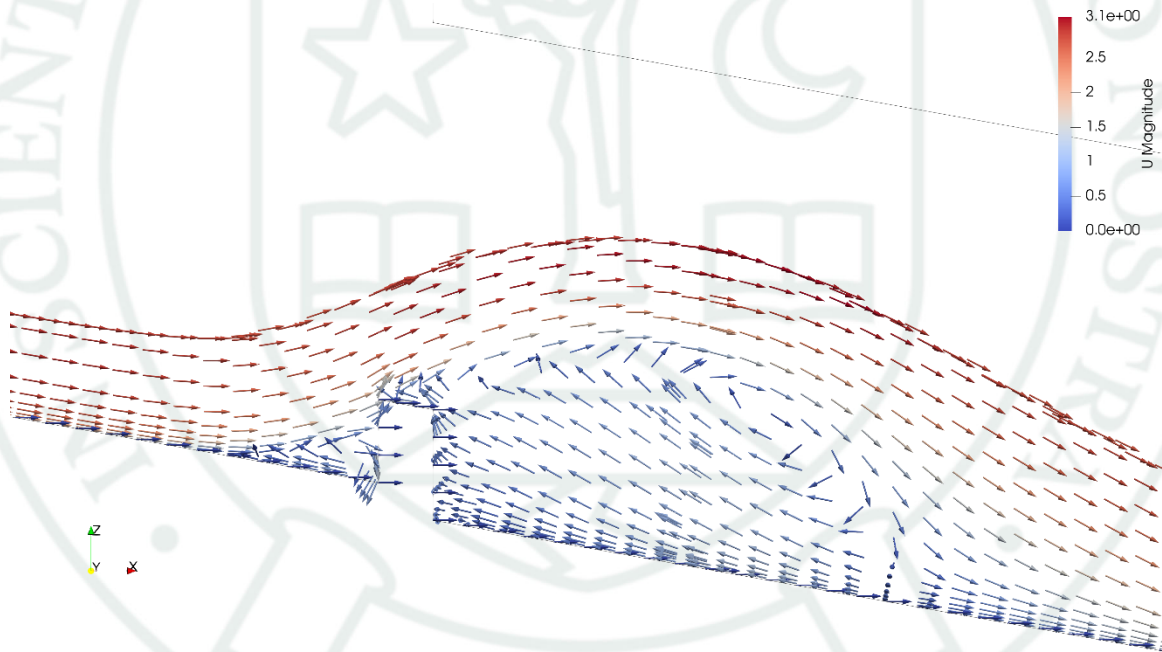
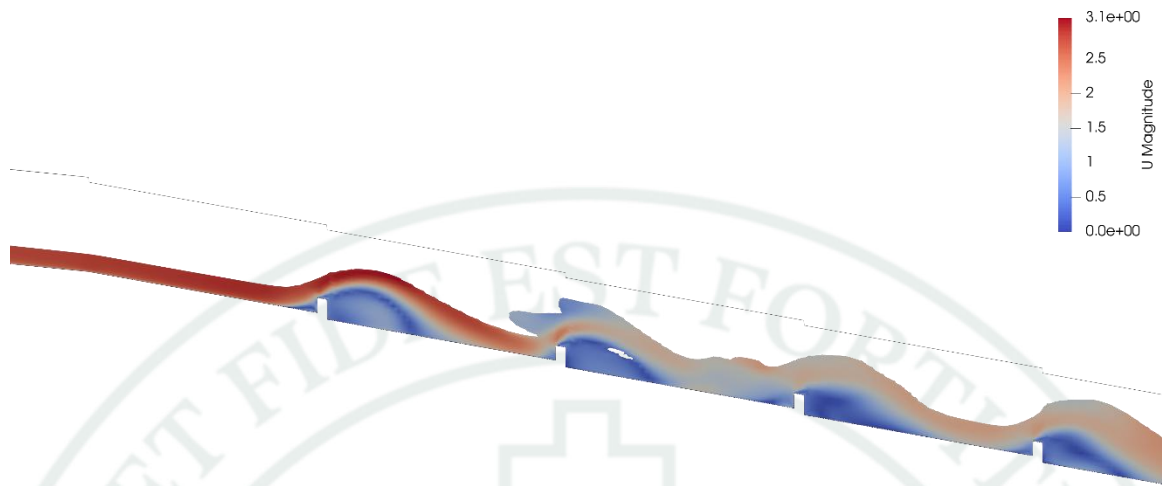
Modelo: pooled_2x2_0.02



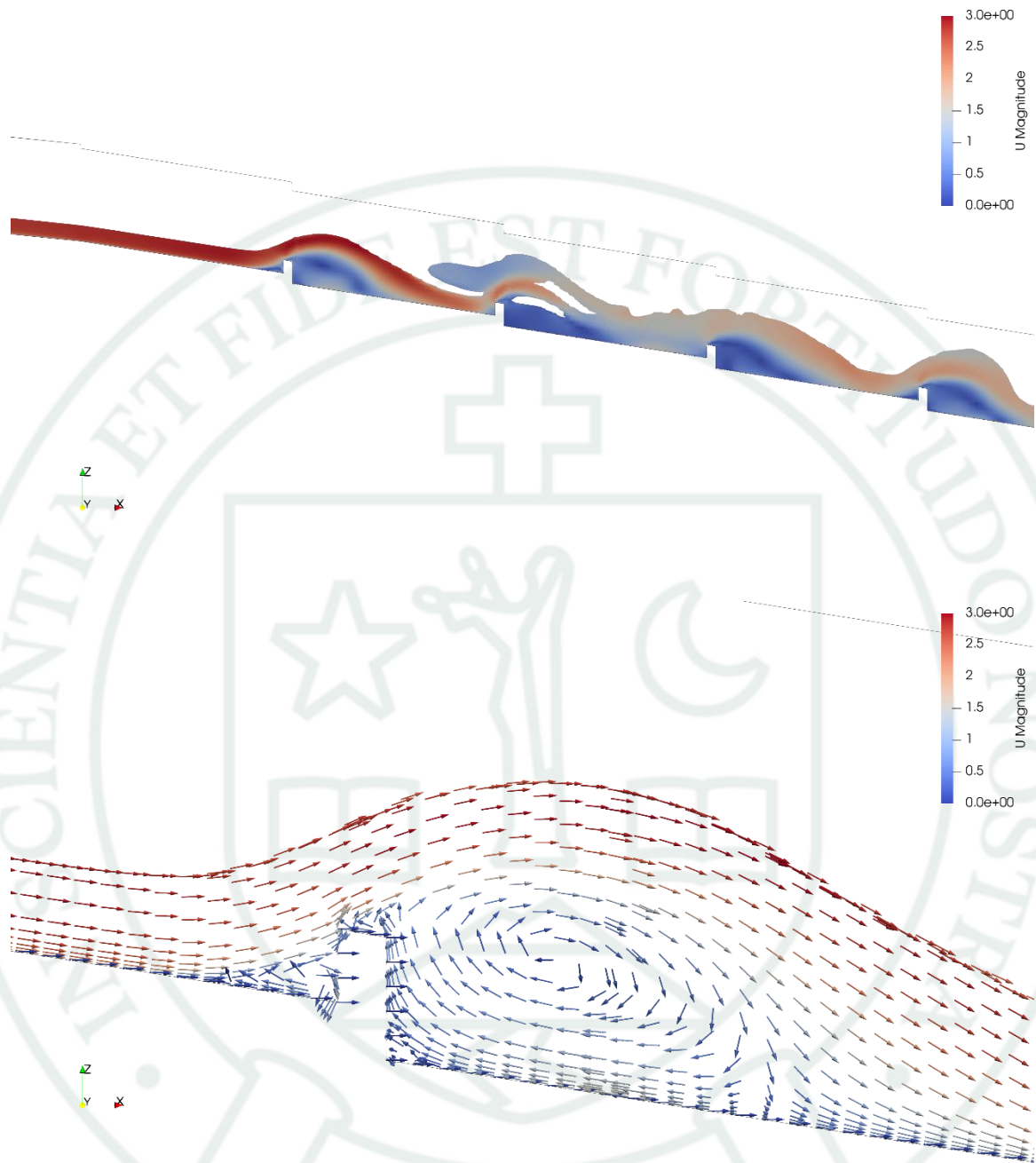
Modelo: pooled_2x2_0.03



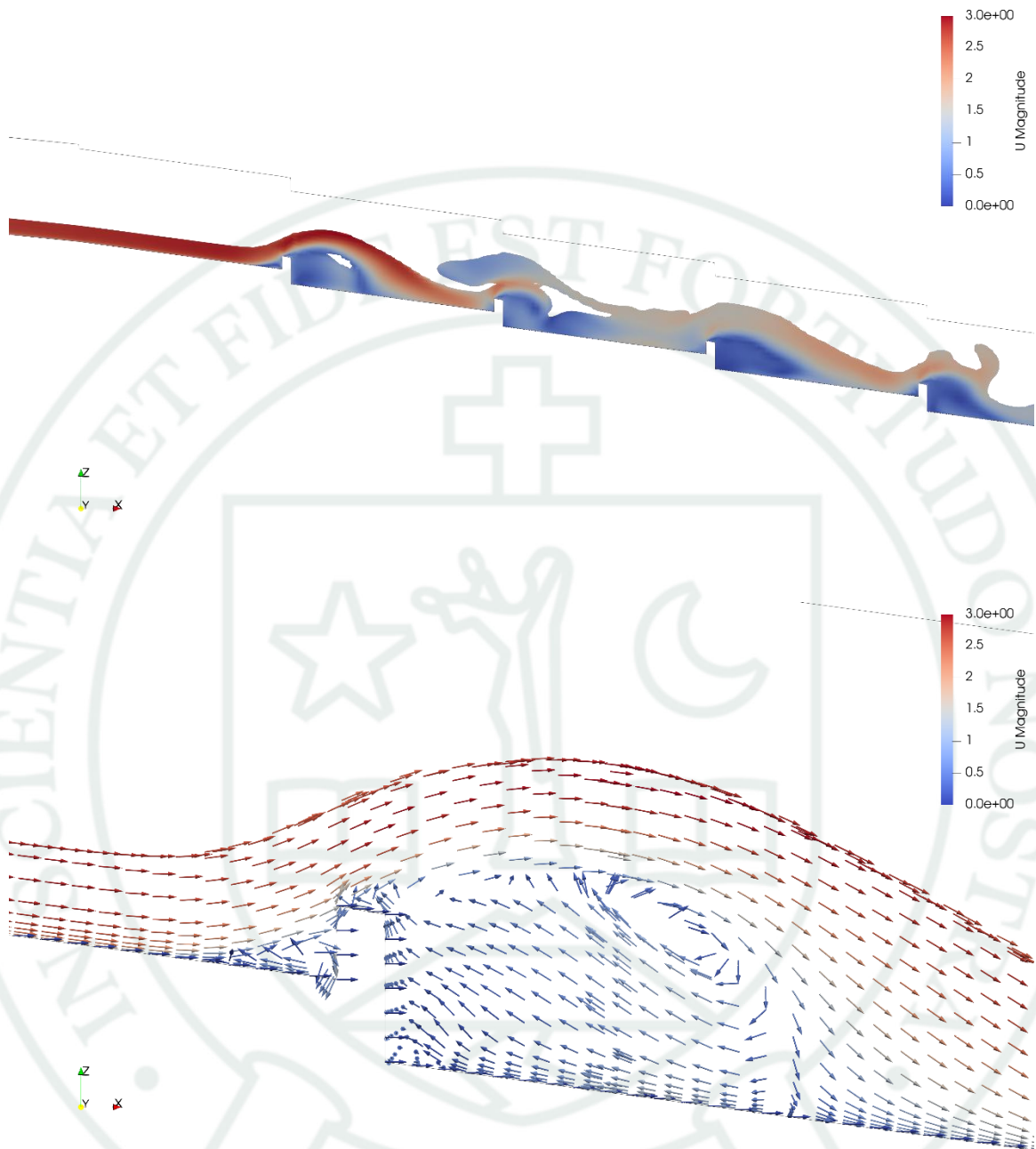
Modelo: pooled_2x3_0.01



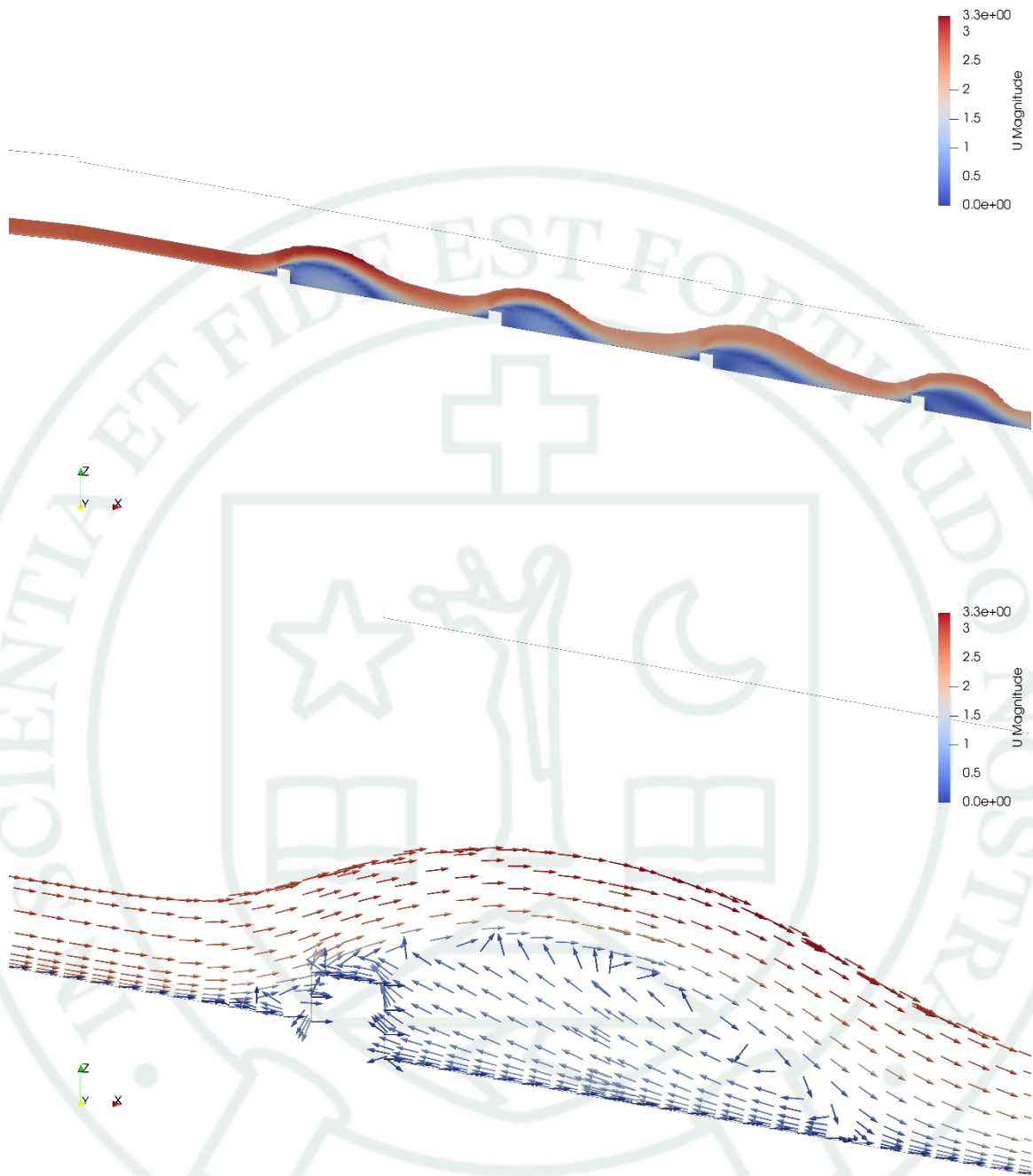
Modelo: pooled_2x3_0.02



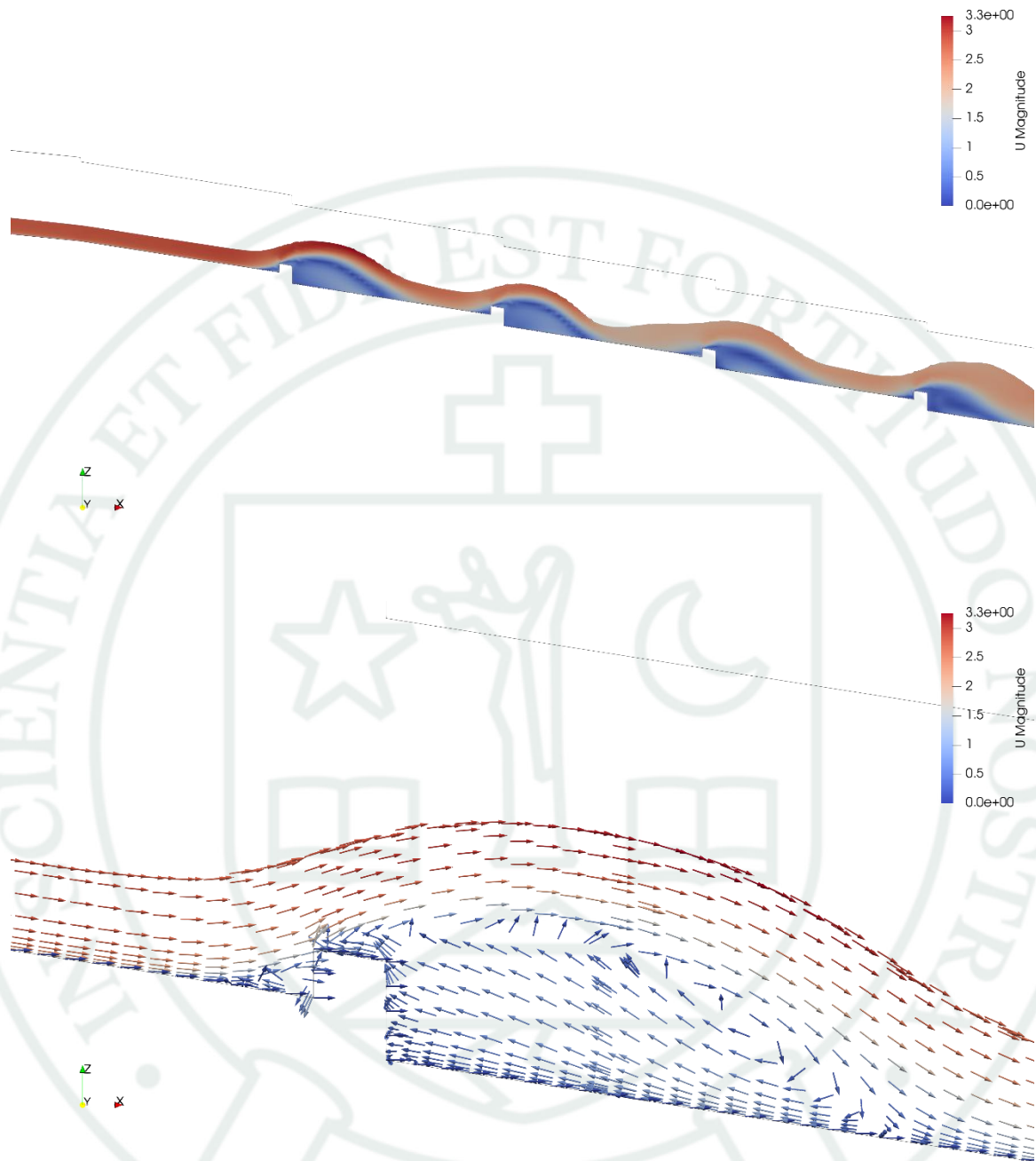
Modelo: pooled_2x3_0.03



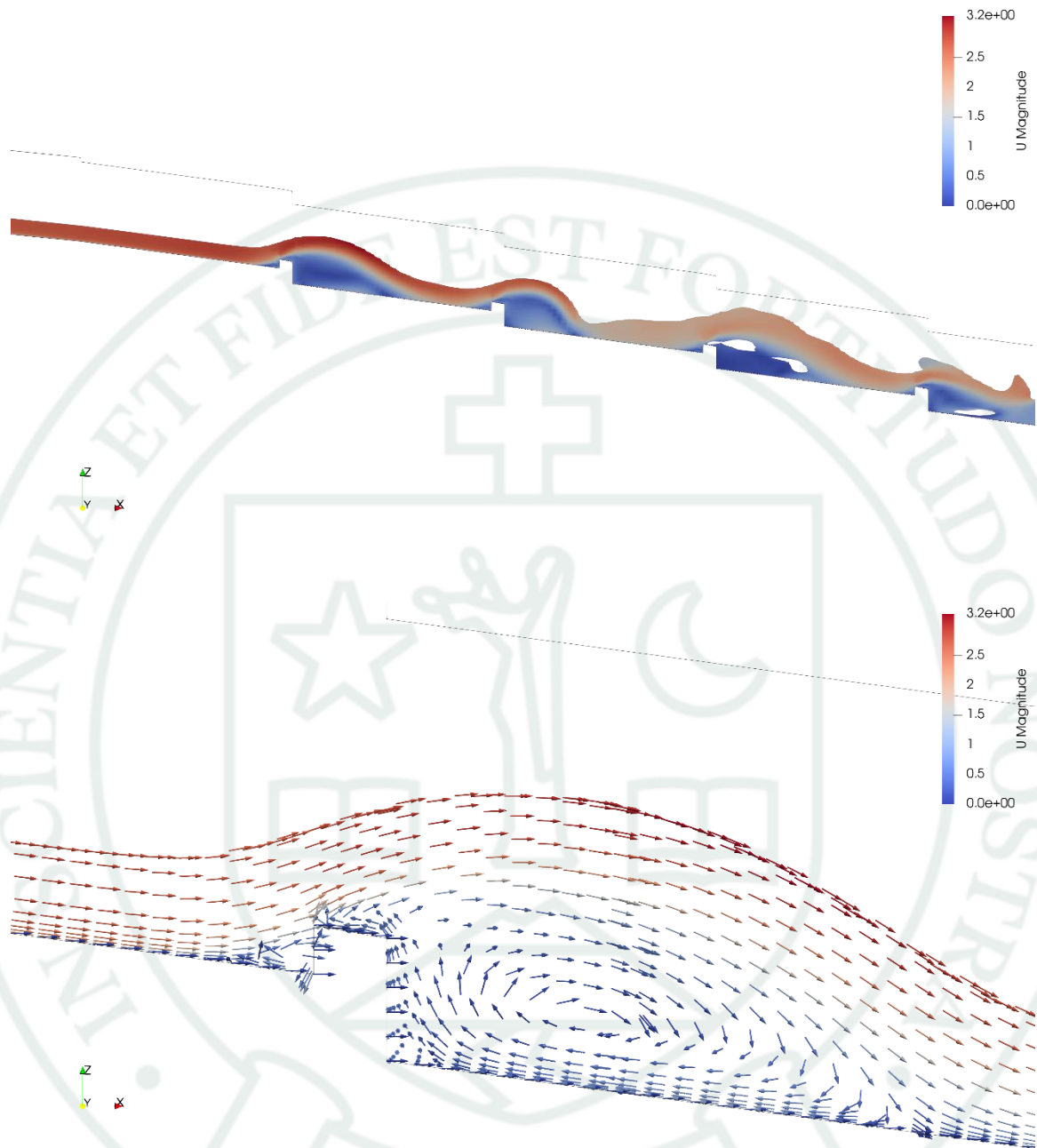
Modelo: pooled_3x2_0.01



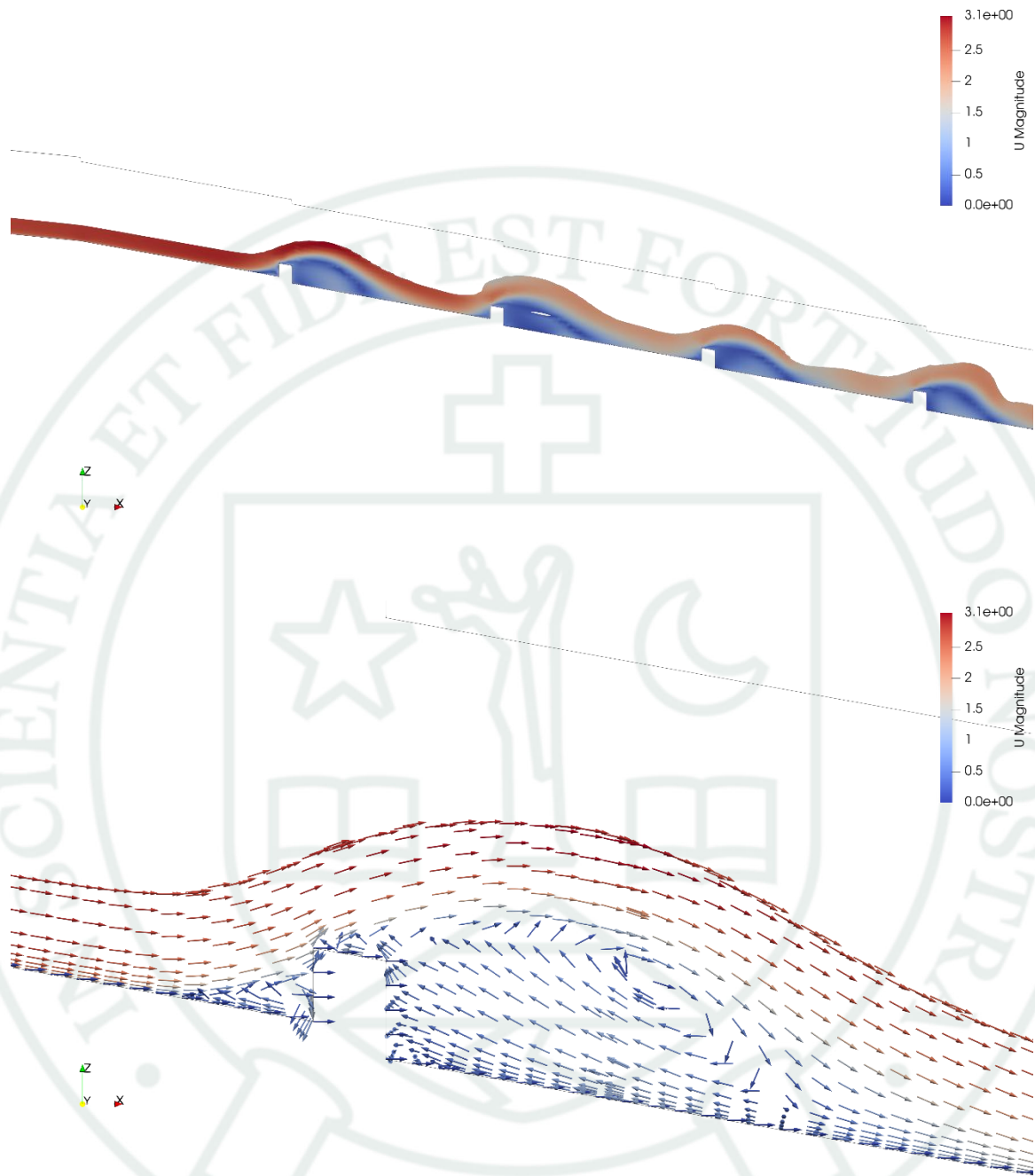
Modelo: pooled_3x2_0.02



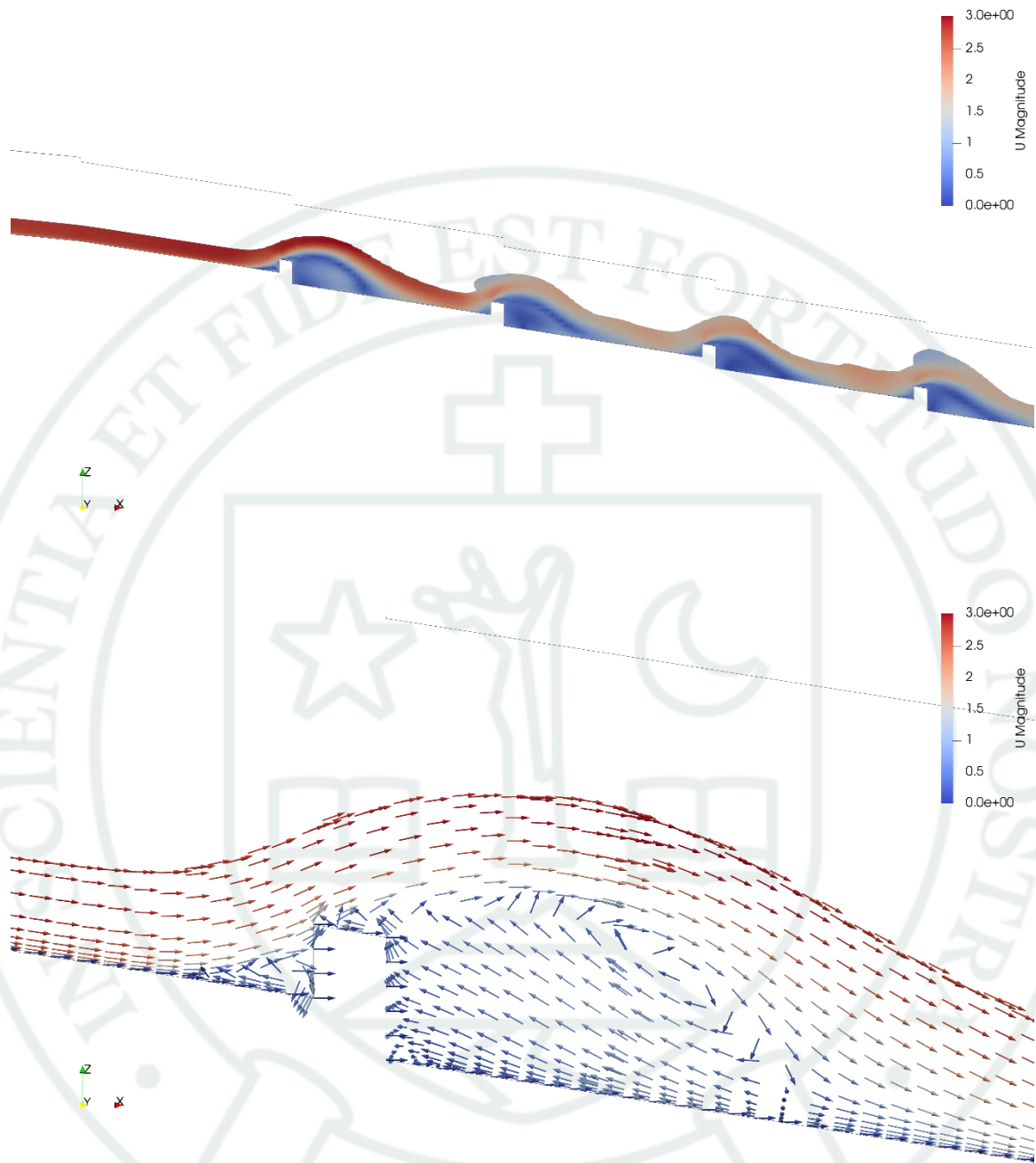
Modelo: pooled_3x2_0.03



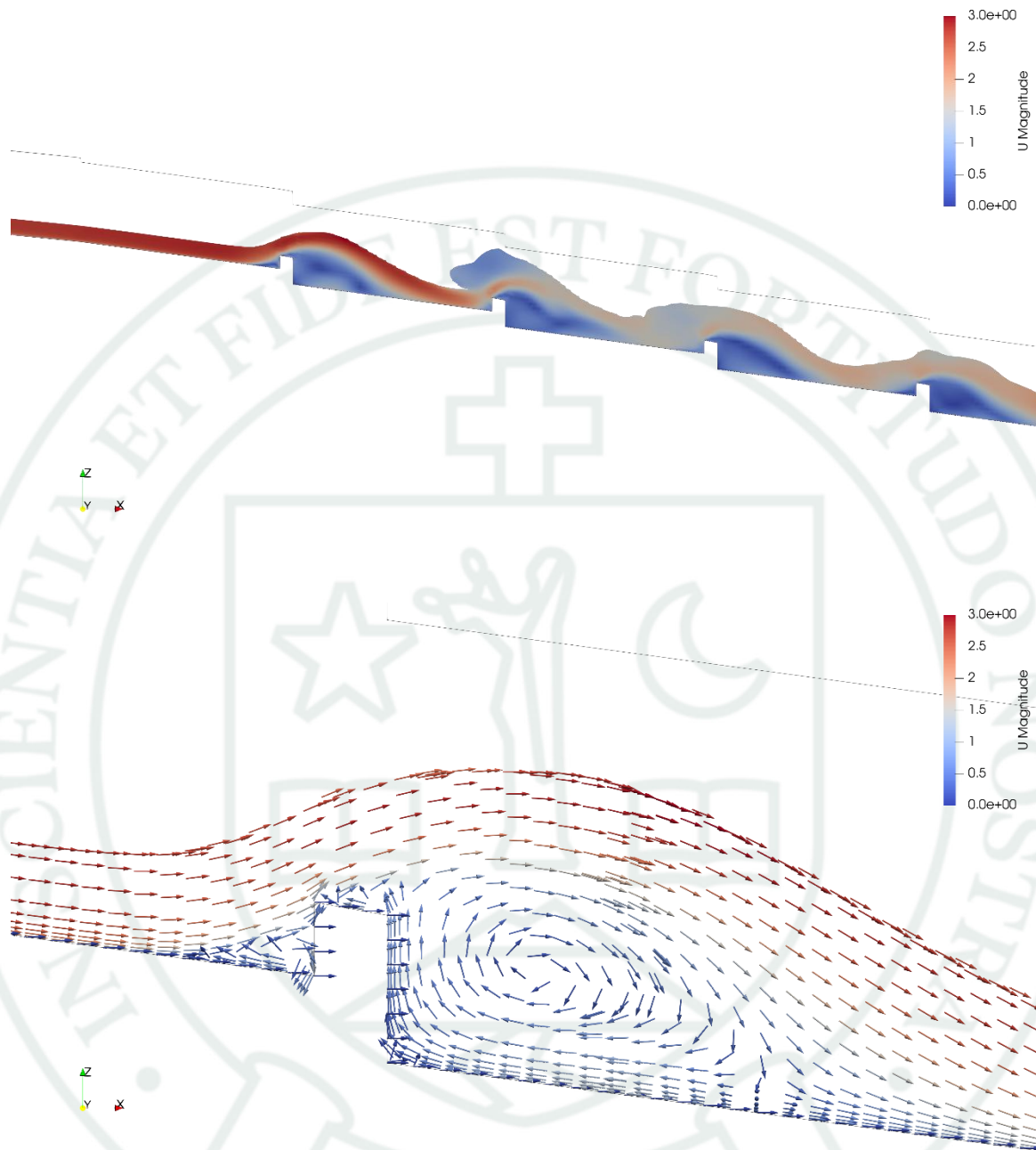
Modelo: pooled_3x3_0.01



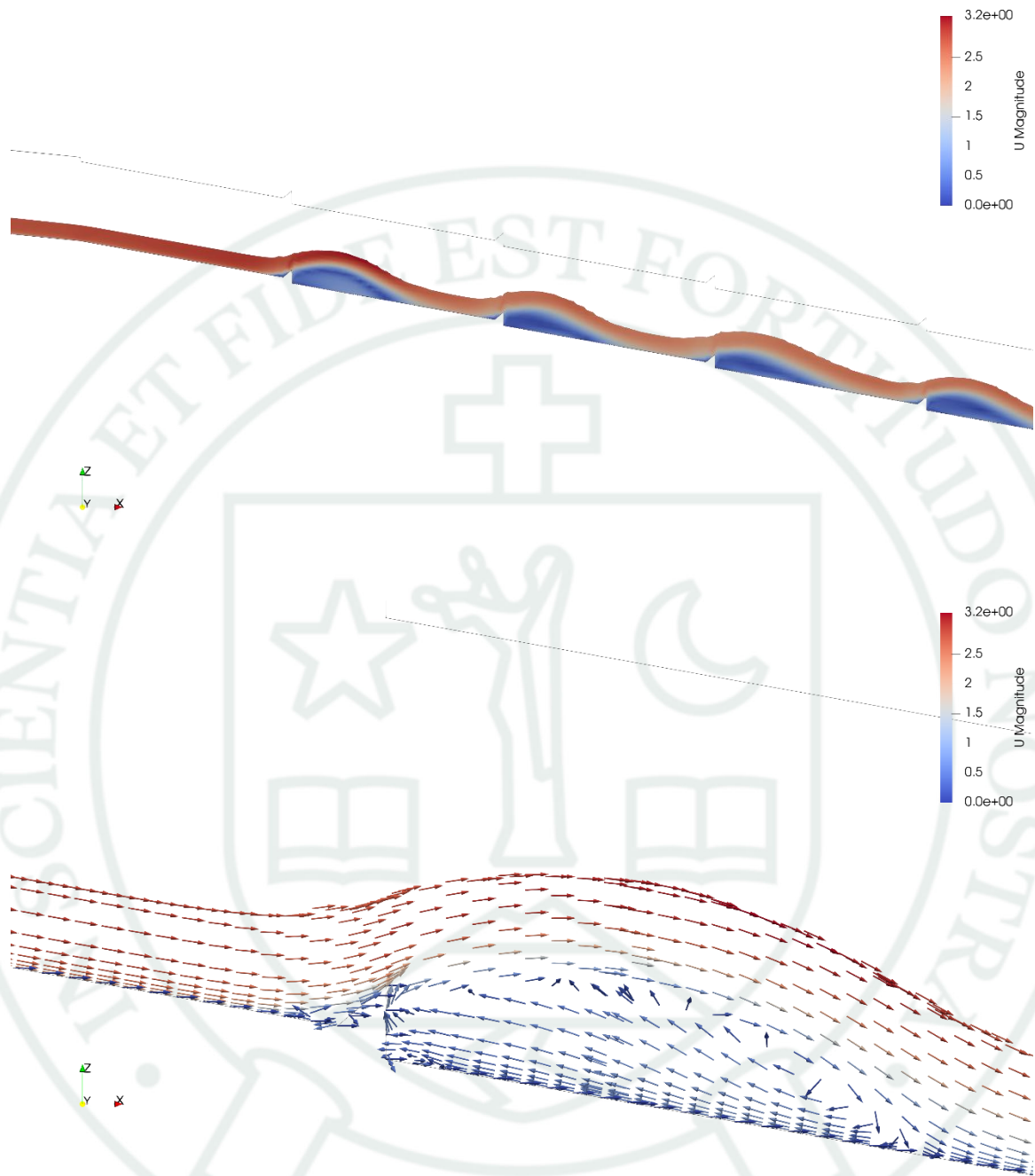
Modelo: pooled_3x3_0.02



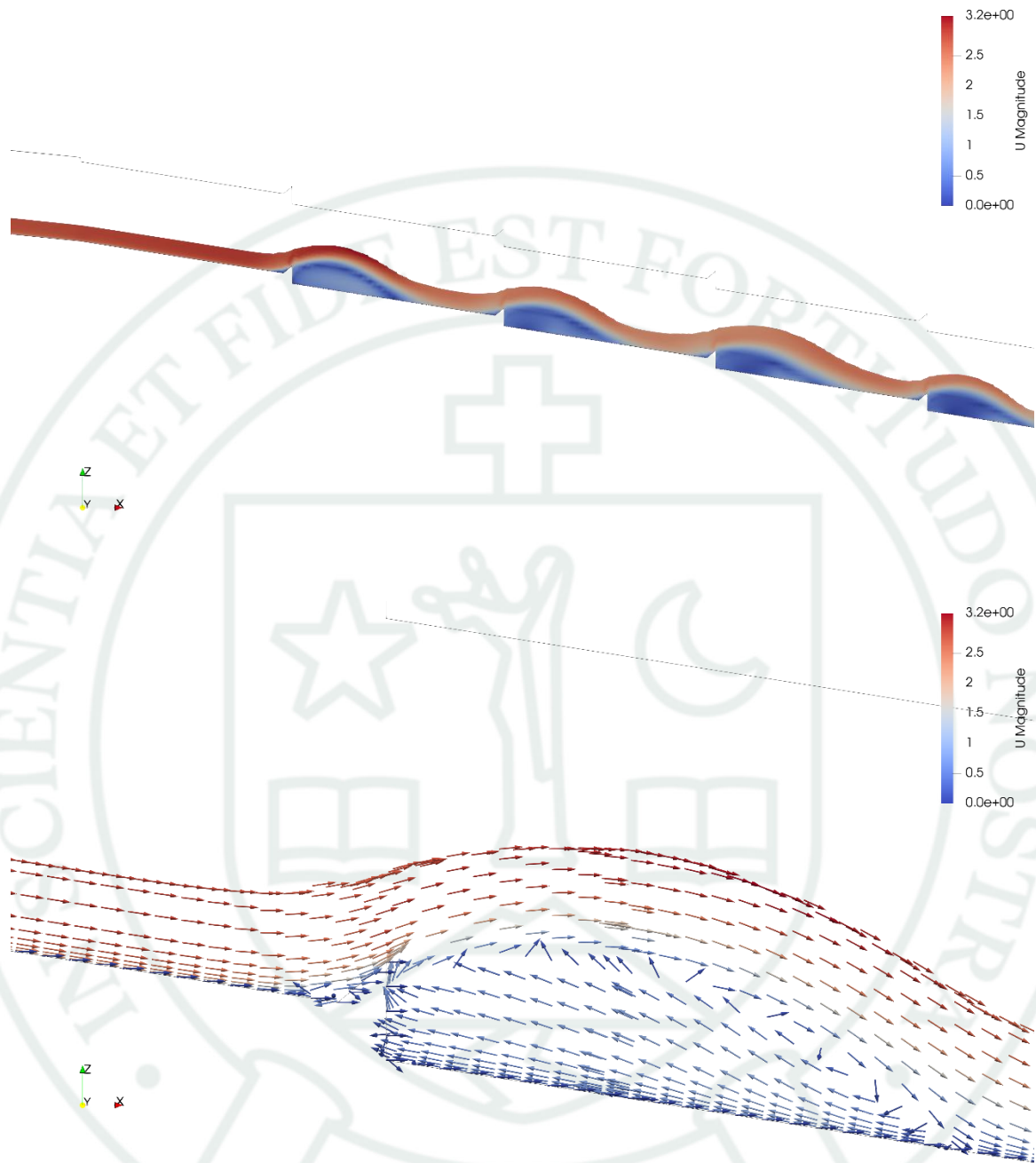
Modelo: pooled_3x3_0.03



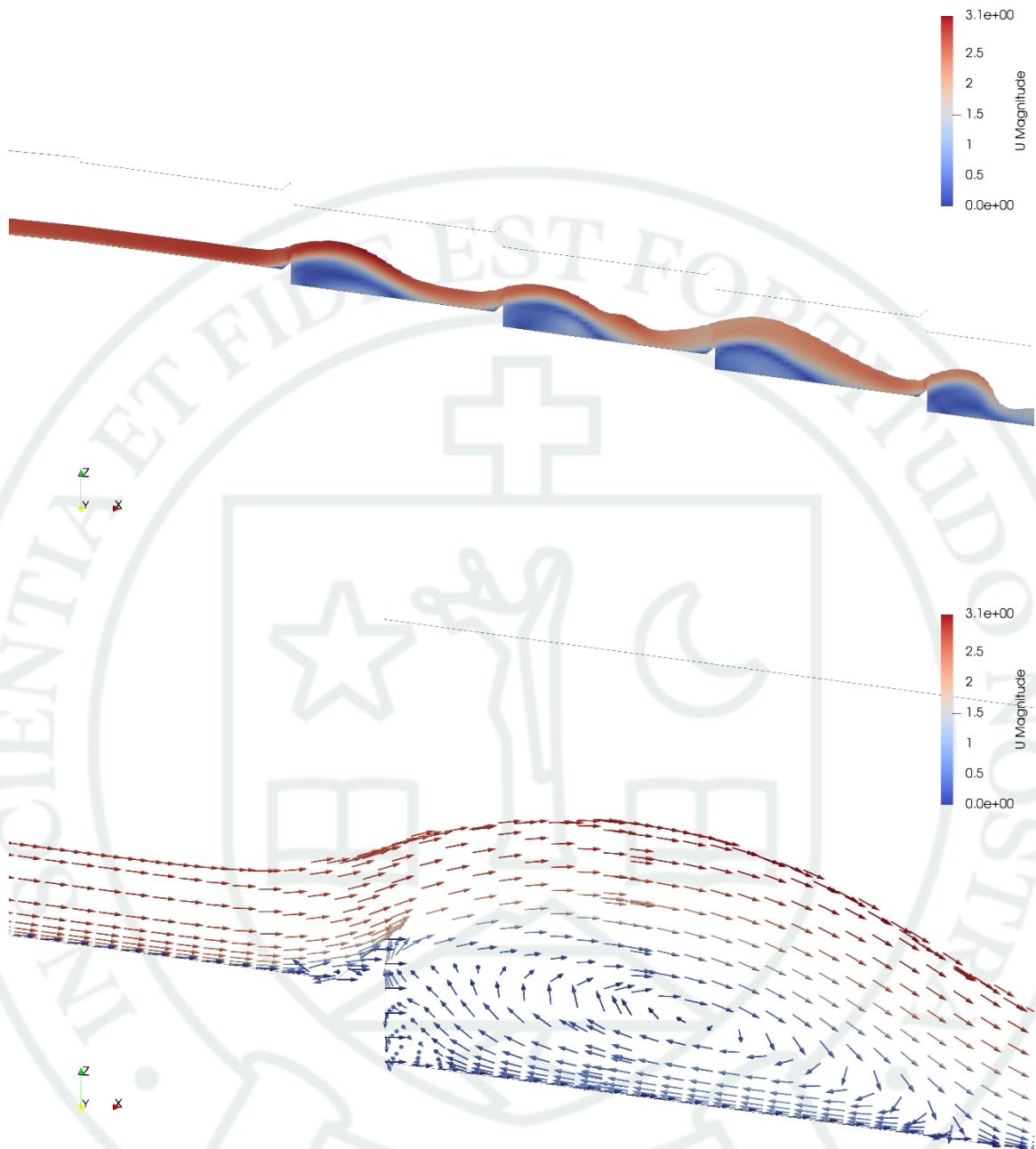
Modelo: triangle_2x2_0.01



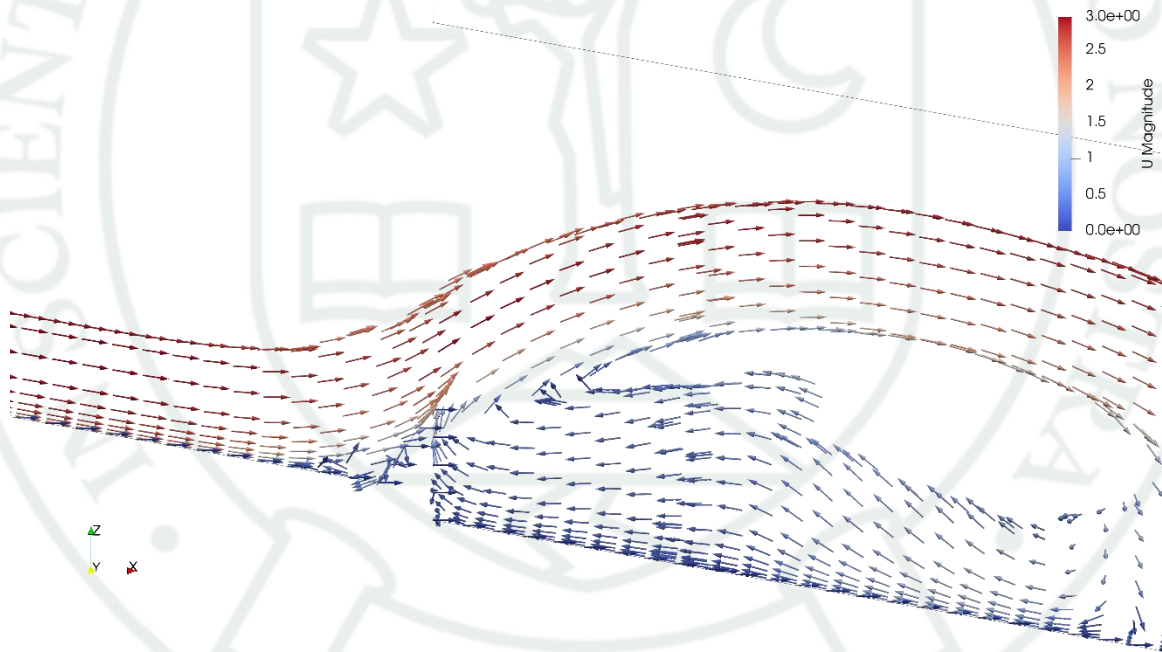
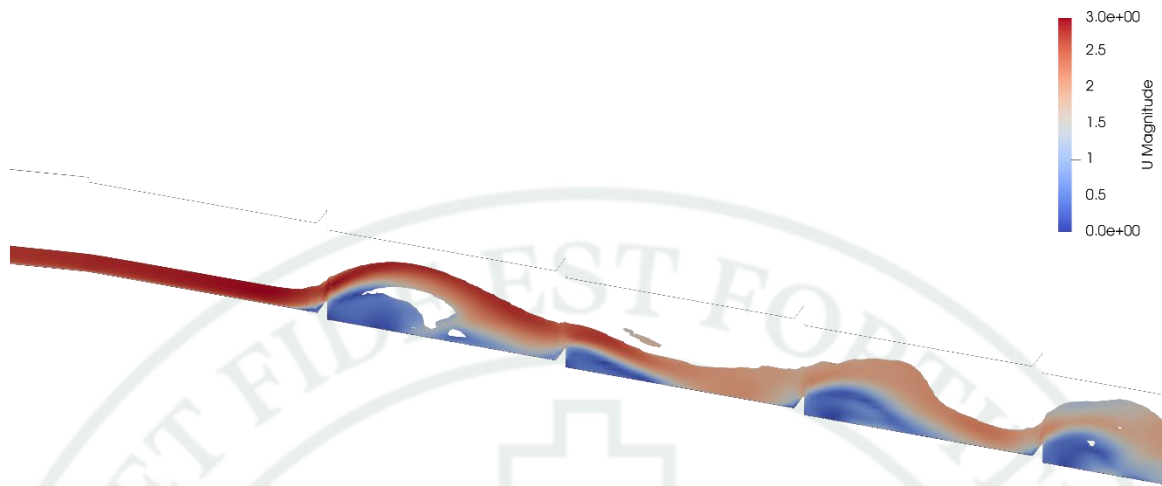
Modelo: triangle_2x2_0.02



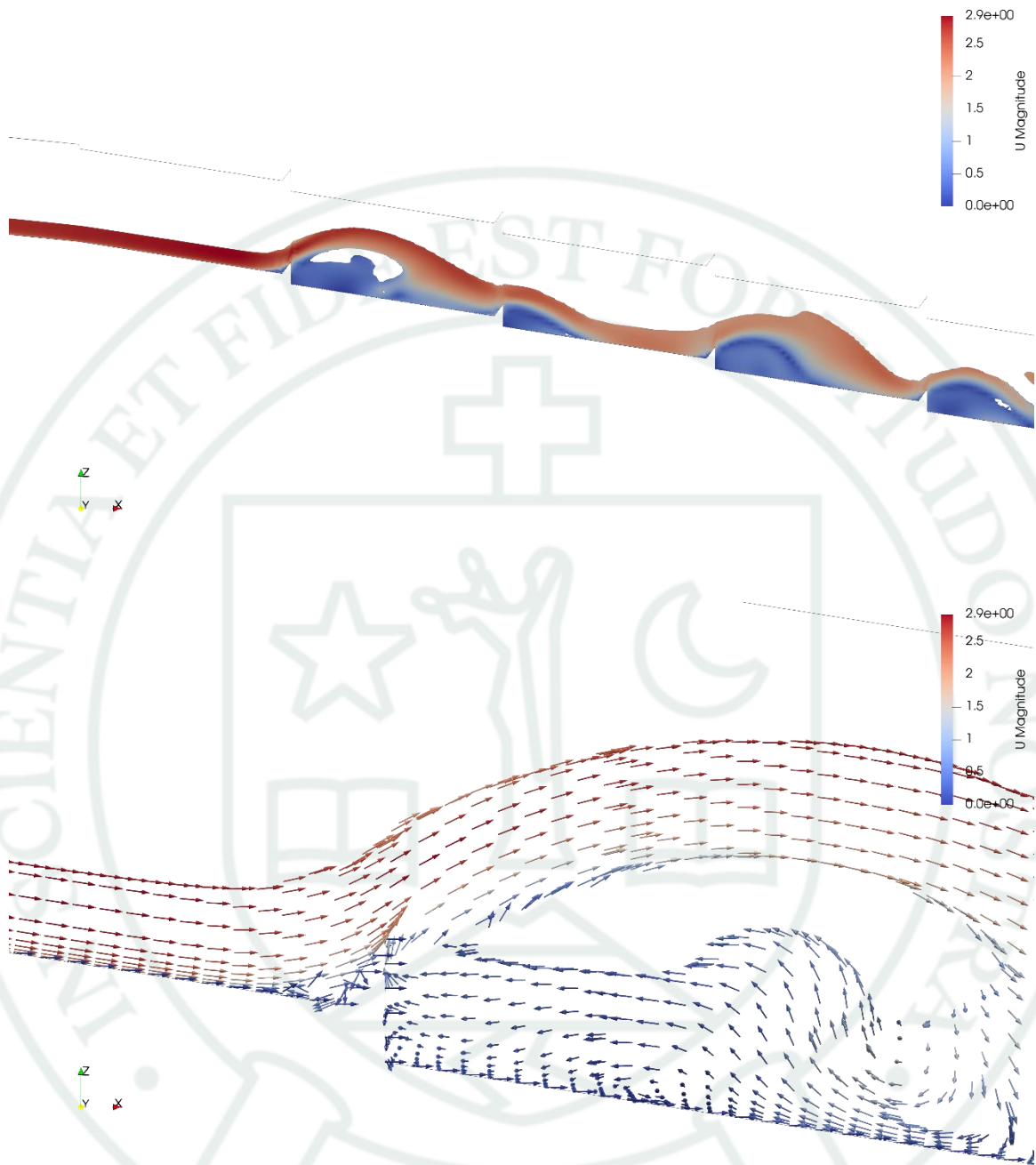
Modelo: triangle_2x2_0.03



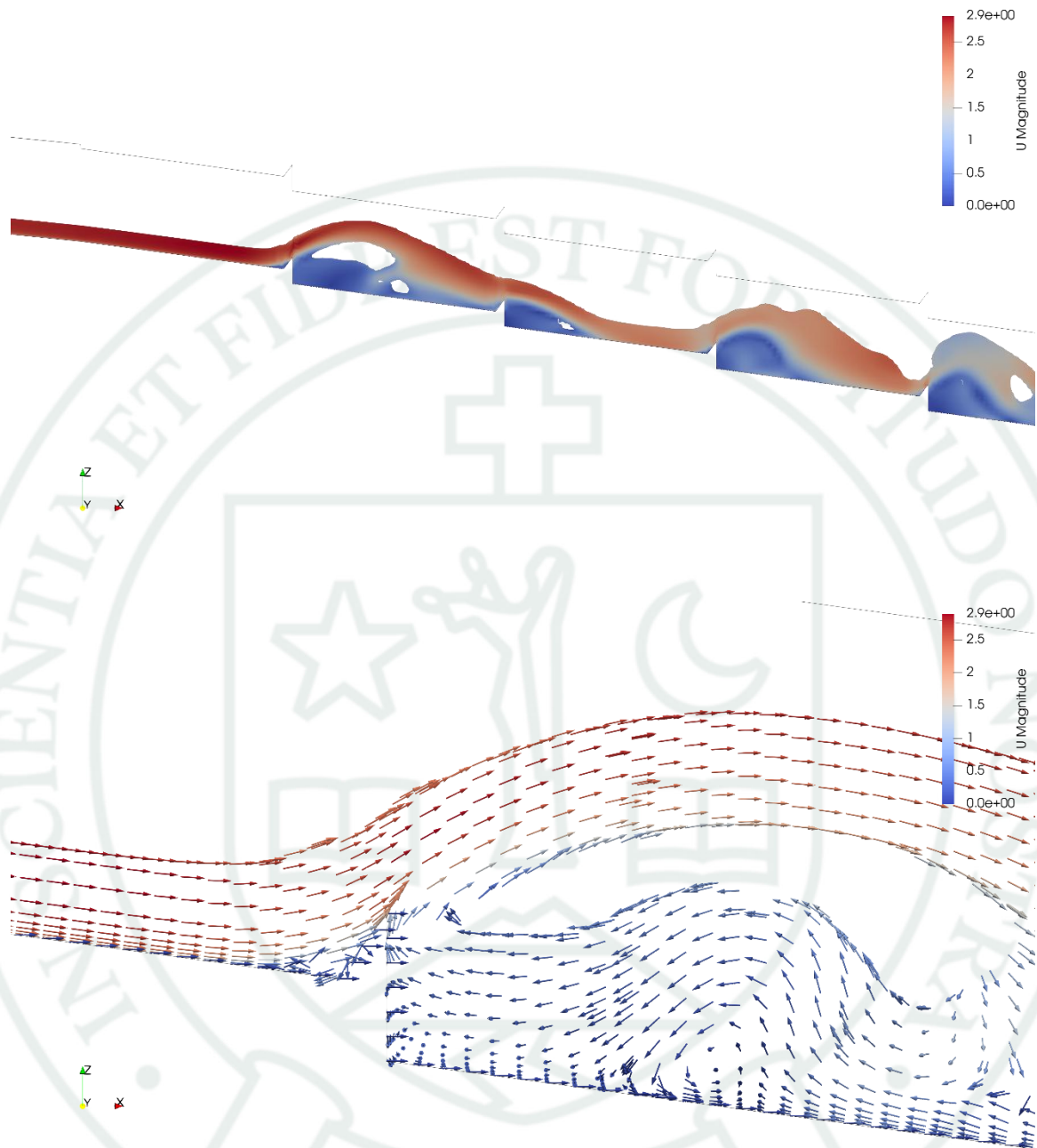
Modelo: triangle_2x3_0.01



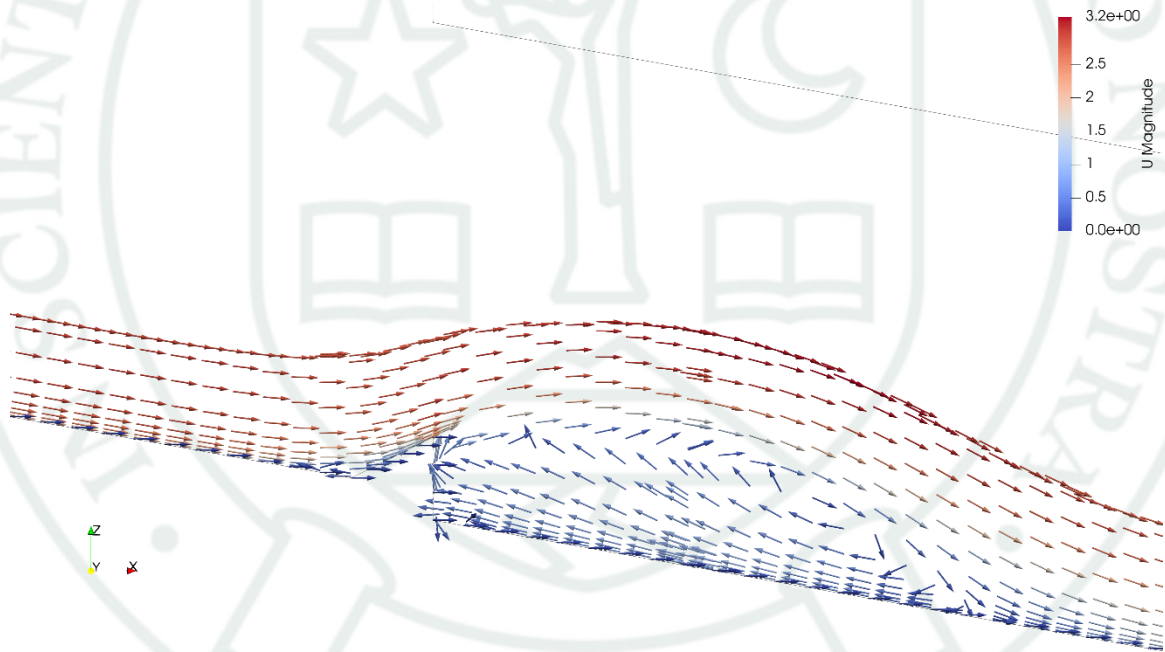
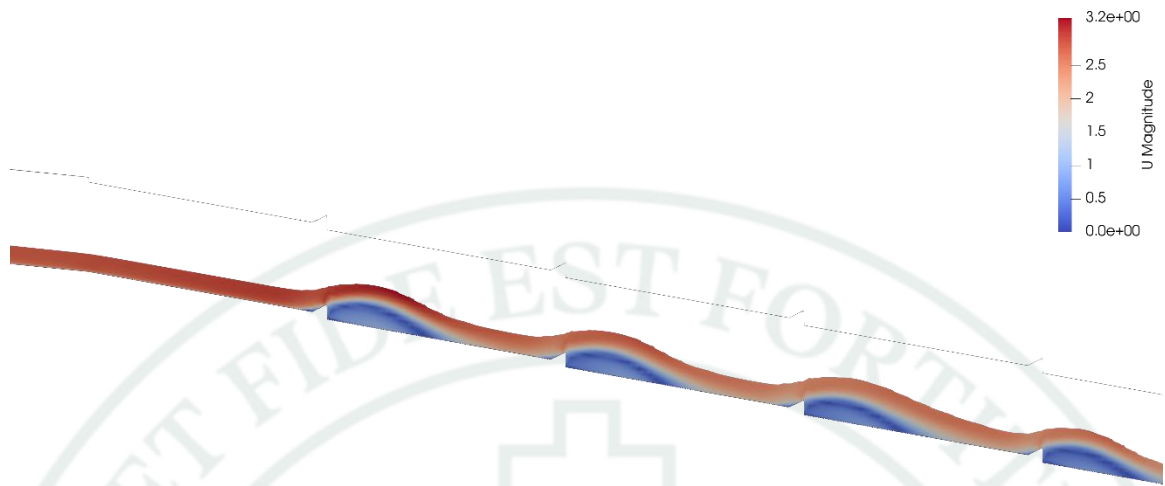
Modelo: triangle_2x3_0.02



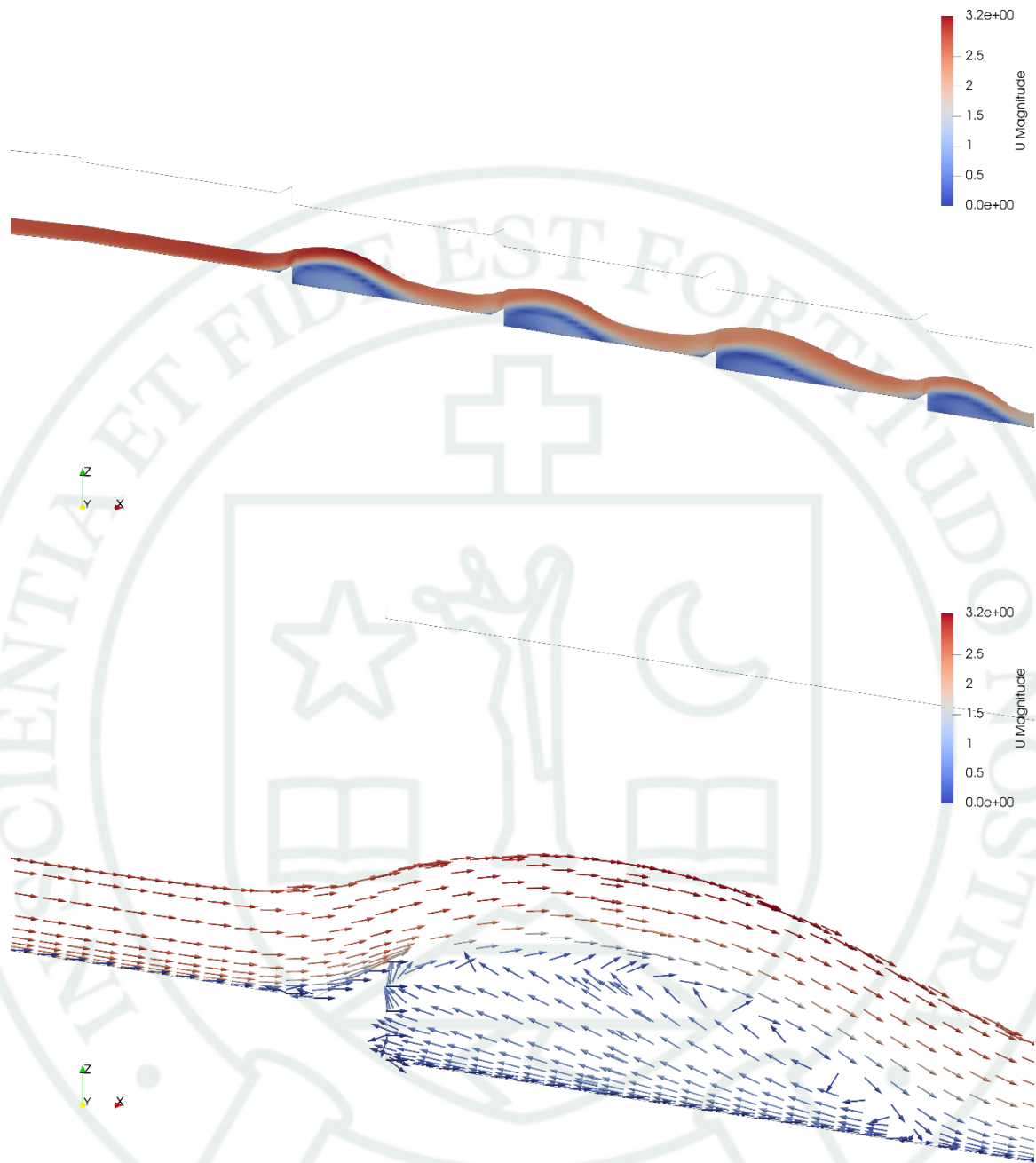
Modelo: triangle_2x3_0.03



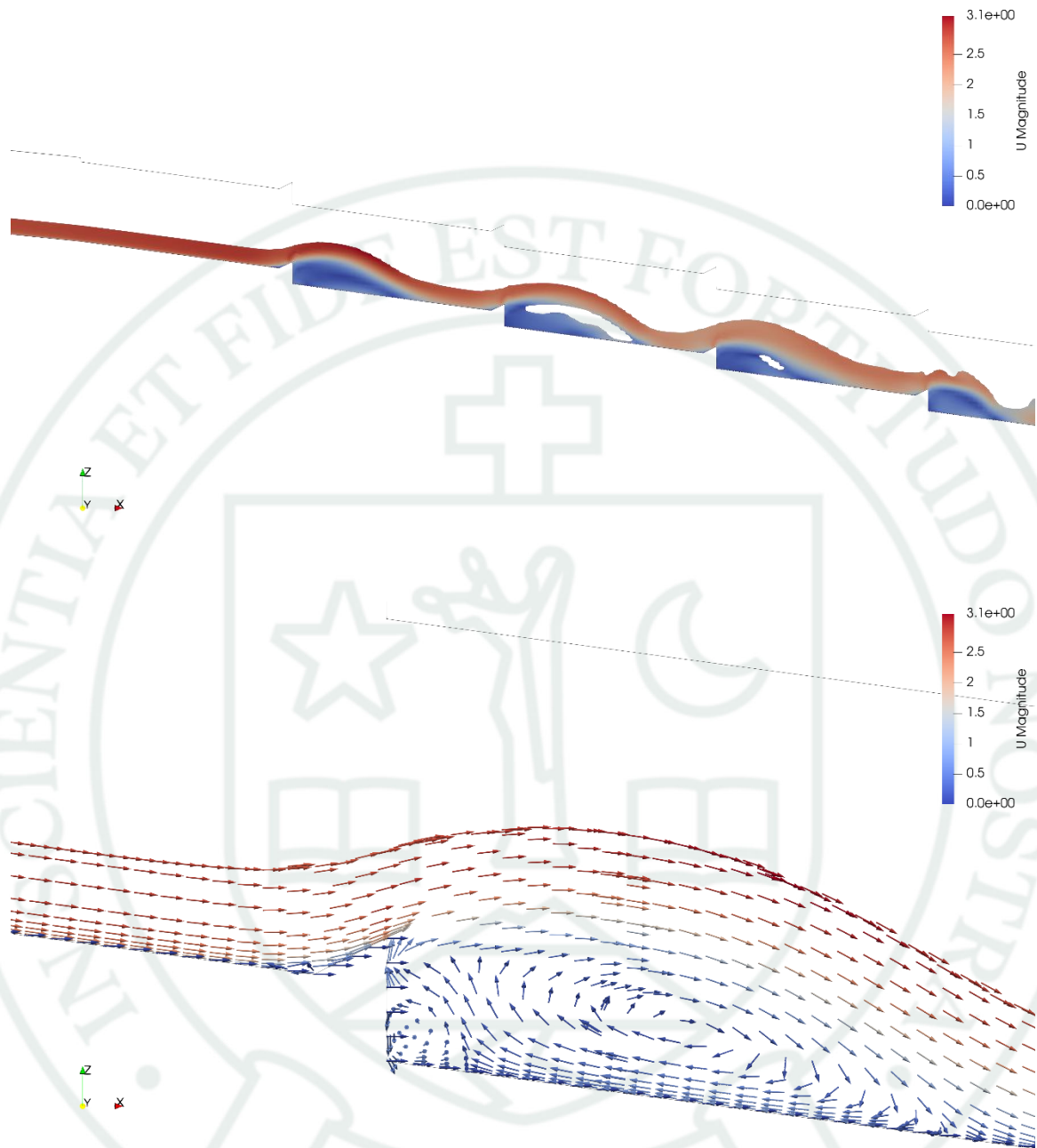
Modelo: triangle_3x2_0.01



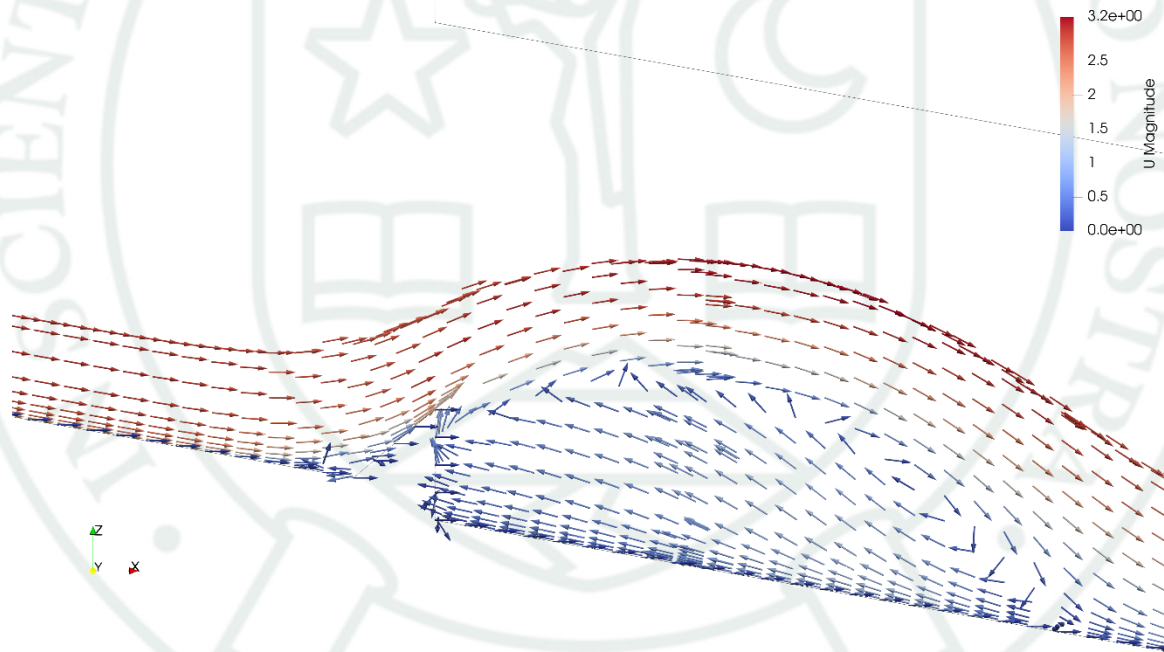
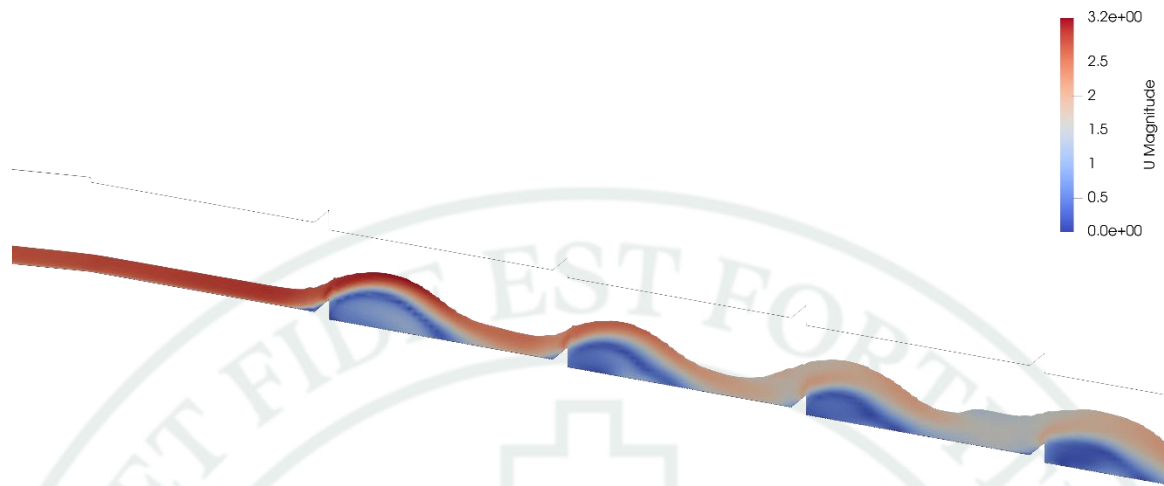
Modelo: triangle_3x2_0.02



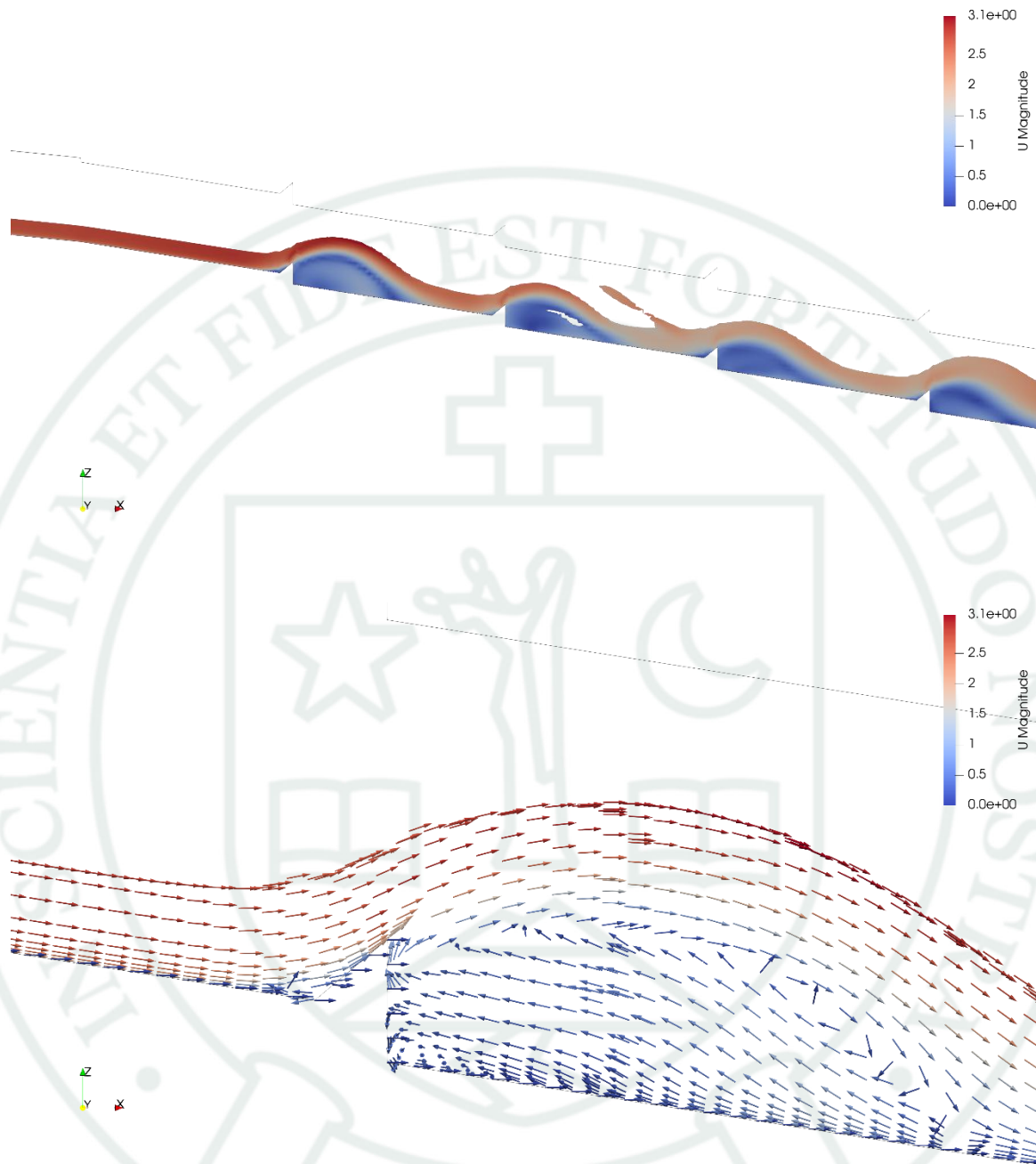
Modelo: triangle_3x2_0.03



Modelo: triangle_3x3_0.01



Modelo: triangle_3x3_0.02



Modelo: triangle_3x3_0.03

